Quaderno di geometria

a cura di **Maria Arcà** e **Paolo Mazzoli**
in collaborazione con **Alessandra Falconi**

Centro Alberto Manzi

Regione Emilia-Romagna
Assemblea Legislativa

Centro Alberto Manzi

Quaderno di geometria

Da dove siamo partiti e perché

Questo quaderno documenta un lungo lavoro sull'insegnamento della geometria progettato e realizzato da Alberto Manzi, Maria Arcà e Paolo Mazzoli. Era l'anno scolastico 1980-1981 presso la scuola Fratelli Bandiera di Roma.

Maria Arcà, ricercatrice del CNR, conservò i materiali di lavoro: schede, riflessioni dei bambini, compiti svolti, sbobinature delle discussioni, vecchie diapositive. C'era molta documentazione che volevamo valorizzare, certi che quel percorso di geometria potesse essere utile anche oggi agli insegnanti. Era necessario digitalizzare tutto, recuperare le vecchie diapositive e i documenti dattiloscritti e disegnati. A questo ha pensato il Centro Alberto Manzi che ha dedicato mesi al recupero e alla digitalizzazione del materiale che trovate in questo quaderno.

A cosa serve oggi rileggere quell'esperienza?
Maria Arcà e Paolo Mazzoli hanno accettato di rimettere le mani tra quelle carte per accompagnarci nella scoperta fondamentale dello spazio che i bambini di Manzi fecero con un continuo "fare e disfare" i concetti, le cose, le esperienze.

Ecco allora che l'insegnante interessato a sapere cosa succedeva nella classe del maestro Manzi ne ha qui un esempio. Ogni settimana il lavoro evolveva e l'esperienza ben analizzata da Maria Arcà nelle prossime pagine rappresenta un taccuino di appunti che gli insegnanti potranno usare per progettare i propri interventi educativi, per riflettere sulle conoscenze dei loro bambini, per smontare il loro modo di fare scuola alla ricerca di vie sempre più attente ai tanti modi di apprendere degli alunni.

Il gruppo di progetto della sperimentazione didattica qui raccontata era composto da **Alberto Manzi**, **Maria Luisa D'Angiolino** (insegnanti) **Maria Arcà**, **Paolo Guidoni** e **Paolo Mazzoli**, citato come Pablito (ricercatori).
I ragazzi sono indicati con il numero d'ordine dell'appello quotidiano.

Livello scolastico di riferimento

- intero ciclo elementare
- intero ciclo di scuola media

Buona lettura
Centro Alberto Manzi

Indice

Introduzione

Idee di base e strategia complessiva generale

La linea di lavoro che presentiamo rappresenta solo una parte del lavoro sullo spazio e la geometria che abbiamo condotto in questi anni.
La maggior parte dei discorsi di geometria, e delle corrispondenti attività, sono infatti strettamente correlati con altri discorsi quale il numero, la fisica, la geografia, le attività espressive e quelle motorie, e molte altre.
È evidente dunque che tutti i problemi che riguardano le proprietà spaziali del reale devono essere diluiti nell'intero arco della scuola di base, nei diversi contesti disciplinari e ai diversi livelli di età.

Tuttavia ci sono dei discorsi, per così dire 'interni' allo spazio, che costituiscono quella che normalmente viene chiamata 'geometria'.
Abbiamo potuto realizzare una linea di questo tipo - con ragazzini di una certa età (10 anni) - con i quali avevamo lavorato a partire dalla seconda elementare: e in tal modo molte idee si erano andate via via stabilizzando già prima di iniziare questo lavoro.

Il punto di partenza è, anche in questo caso, la necessità di raccogliere i diversi significati che vengono attribuiti ad alcune parole di tipo spaziale che sono un po' il sostegno per i concetti più complessi. Termini come 'dritto', 'curvo' e 'piatto' si ricollegano ad un enorme bagaglio percettivo che alla fine del ciclo elementare è già notevolmente articolato e strutturato.
È su questi aspetti che abbiamo concentrato le nostre attività iniziali.

Siamo poi approdati ad un concetto che in realtà è il risultato di una complessa aggregazione di altri concetti e che forse rappresenta ciò che di più puramente spaziale i nostri modi di pensare e di parlare producono: la 'forma'.
Ci sono almeno due motivi per considerare l'idea di 'forma' come particolarmente significativa in geometria:

1) sia nel campo percettivo che in quello disciplinare formalizzato il 'giudizio' sulla forma (cioè la risposta alla domanda 'che forma ha?) è un giudizio sintetico irriducibile; è molto difficile fare classificazioni di forme ed è addirittura impossibile costruire un sistema di misura delle forme.

2) l'idea di forma è inoltre completamente vincolata dai problemi di dimensione e di scala; cioè costituisce un concetto più ampio di quelli propri della geometria metrica. Moltissimi problemi che i ragazzi incontrano nell'apprendimento scolastico della geometria sono legati alla complessa relazione che esiste tra la forma delle figure e la loro classificazione usuale (ad esempio le definizioni di 'rettangolo' e di 'triangolo' non sono solo delle definizioni di forma, etc.).

Siamo quindi passati ad attività di scomposizione e di costruzione di figure con altre figure che hanno la stessa forma, (un rettangolo in tanti rettangoli simili, un triangolo in tanti triangoli...) attraverso le quali è possibile ricavare delle regole di tipo spaziale che non sono legate alla misura (un triangolo è sempre scomponibile in n triangoli simili se si dividono i suoi lati in n parti).

Abbiamo dedicato la parte finale del lavoro al problema della superficie di una figura e dell'equivalenza di due figure attraverso attività di composizione di figure diverse usando sempre gli stessi pezzi (due triangoli uguali).
I ragazzi si sono resi conto che è possibile costituire un certo numero di quadrilateri a partire da due triangoli e che alcuni di questi quadrilateri (i parallelogrammi) potevano facilmente essere ridotti a dei rettangoli con un opportuno taglio ed una successiva ricomposizione dei due pezzi ottenuti.

A questo punto è possibile far leva sulla procedura di calcolo dell'area del rettangolo per ricavare analoghe regole per i parallelogrammi equivalenti e per i triangoli (di area metà) che formano i parallelogrammi.

Quest'ultima fase del lavoro comporta numerosi problemi che riguardano la definizione di 'altezza' rispetto ad una certa 'base'.
Ci sembra importante sottolineare quanto sia importante un lavoro incentrato sulla geometria che arrivi anche a risultati che riguardano le regole formali della geometria euclidea senza necessariamente restare legati al problema delle misure, delle unità di misura e delle famigerate 'equivalenze' per il passaggio da un'unità di misura ad un'altra.

I ragazzi possono così accumulare una quantità di conoscenze sulle proprietà dello spazio che sono del tutto generali e che possono così restare solidamente legate una all'altra indipendentemente dalle difficoltà derivanti dal calcolo numerico

Schema di lavoro sulla 'geometria'

TEMA	DOMANDE CHIAVE	ATTIVITÀ
Dritto, curvo, piatto, angolo...	È dritto questo bastone?	Giochi con bastoni, righe, bicchieri, fiaschi, spaghi, fogli...
	È piatto questo spago?	Giochi di osservazione di due o tre oggetti allineati
	Dove sono pezzi dritti e pezzi curvi in un bicchiere?	Giochi di movimenti umani 'dritti' o 'piatti'...
Riconoscimento di forme	Quali oggetti possono essere raggruppati (per forma)?	Osservazione e raggruppamenti di oggetti vari (tavolette, palline, tappi, spaghi, anelli da tenda...)
	Quali recipienti possono essere raggruppati?	Osservazione e raggruppamenti di recipienti (bottiglie di varia grandezza, imbuti, bicchieri, posate, tazze, pentole...)
	Quali figure possono essere raggruppate?	Osservazione e raggruppamento di figure disegnate (figure curve e poligoni di varie forme e dimensioni)
	Quali triangoli possono essere raggruppati?	Osservazione e raggruppamento di un tipo di figura (triangoli di cinque tipi diversi e di cinque scale diverse)
Identificazione di famiglie di figure (simili)	Perché hai messo insieme certi triangoli?	Giochi di raggruppamento di centinaia di figure triangolari ritagliate
	Perché hai messo insieme certi rettangoli? Quali sono le caratteristiche comuni dei triangoli di una stessa famiglia?	Esercizi di ricerca di una definizione 'operativa' di appartenenza ad una certa famiglia ('criteri' per la similitudine: criteri angolari, criteri di rapporto tra lunghezze, criteri mescolati, criteri percettivi...)
Costruzione e decomposizione di figure da (o in) altre figure simili	Come si può ricoprire una figura con tante figure della stessa famiglia?	Ricoprimento di triangoli con altri triangoli
		Ritaglio di triangoli per formare altri triangoli
	Come si può scomporre una figura in tante figure della stessa famiglia? Quante figurine possono venire?	Costruzione e decomposizione di triangoli per linee parallele (piastrellamenti)

Schema di lavoro sulla ‘geometria’

TEMA	DOMANDE CHIAVE	ATTIVITÀ
Equivalenza di figure e di oggetti solidi	Quale bicchiere contiene più fagioli?	Confronto di volumi tramite riempimento con oggetti campione (fagioli, acqua, riso...)
	Che figure si possono costruire con due triangoli uguali?	Confronto di superfici tramite ricoprimento con figure campione
	Come si può fare un rettangolo tagliando un parallelogrammo?	Costruzione di sei famiglie di quadrilateri a partire da due triangoli uguali
		Trasformazione dei parallelogrammi ottenuti in un rettangolo tramite un solo taglio
Figure piane e direzioni di riferimento: ‘base’ e ‘altezza’	Come si fa a trovare l’altezza di una figura?	Individuazione di altezze in oggetti tridimensionali
	Quante altezze ci sono in un triangolo?	Individuazione di altezze in figure rispetto ad una certa direzione
	Quali figure hanno la stessa altezza? (parallelogrammi, rettangoli e triangoli)	Confronto di altezze di figure diverse
Le ‘formule’ per le aree di figure semplici	Come ‘calcolare’ l’area di un rettangolo?	Calcolo dell’area di rettangoli scomposti in tanti quadratini
	Le figure costruite con gli stessi triangoli hanno la stessa area?	Calcolo diretto moltiplicando il numero di parti in cui è stata divisa la base per il numero di parti in cui è stata divisa l’altezza
	I rettangoli costruiti tagliando e ricomponendo i parallelogrammi hanno la stessa area?	Calcolo dell’area di un parallelogrammo sfruttando l’equivalenza col rettangolo ottenuto tagliando e ricomponendo il parallelogrammo
		Calcolo dell’area di un triangolo che è la metà di un parallelogrammo

1. Dallo spazio... alla misura

Entriamo in classe: una stanza luminosa, ampia, con i banchi disposti lungo le pareti e un grande spazio in mezzo. Lavagna nera in un angolo, ben illuminata dai grandi finestroni, un paio di armadi semi aperti in cui si intravedono pacchi, scatole e oggetti di varia natura. Sull'unica parete rimasta vuota il maestro ha realizzato uno dei suoi bei disegni colorati.
I ragazzi entrano, salutano, si siedono ai banchi e la mattina comincia con un paio di canzoni, talvolta accompagnate con la chitarra da Pablito che spesso partecipa alle lezioni. Quando si lavora, i ragazzi lasciano i banchi e si siedono in cerchio, intorno a grandi fogli di carta bianca disposti sul pavimento. Questo spazio centrale rappresenta il nostro "palcoscenico di lavoro" e su questo vengono disposti, di volta in volta, gli oggetti che "reciteranno" la loro parte, chiedendo spiegazioni e ponendo domande; in questo dialogo muto altri attori, i ragazzi e il maestro, articoleranno discussioni e attività.
Dopo il lavoro in comune, che a volte dura anche un paio d'ore, può cominciare il lavoro individuale, o si possono raggruppare i banchi in modo da svolgere comodamente lavori in gruppo. Alla parete è attaccato un foglio-calendario dove, ogni giorno, i ragazzi segnano le "stelline" (valutazioni positive) conquistate nelle varie fasi del lavoro quotidiano, non vengono mai date valutazioni negative.

Oggi vogliamo parlare di spazio e, come altre volte, sono i ragazzi che iniziano col porre le loro domande. Non solo perché è didatticamente importante "partire dal bambino" come recitano i sacri testi ma anche perché ogni discussione stimola la curiosità del maestro, tesa a conoscere e a provocare la capacità di pensare dei suoi ragazzi. In mezzo al cerchio, sul palcoscenico, c'è una scatola da scarpe vuota: che cosa saprà domandarci?

Maestro - *da cosa so che nella scatola c'è dello spazio?*
1 - *lo spazio deve sempre contenere qualcosa?*
6 - *deve avere sempre un fondo?*
10 - *perché c'è spazio? Dov'è la fonte dello spazio?*
8 - *come si forma lo spazio?*
4 - *lo spazio si usa sempre? Da dove si è creato?*
11 - *lo spazio ha delle grandezze? quanti metri avrà?*
5 - *lo spazio ha dei limiti? Perché ci sarebbe lo spazio dell'universo che non ha limiti, invece c'è lo spazio delle scatole, della classe che ha limiti, oppure c'è anche lo spazio della terra e anche quello ha limiti perché la terra è una palla e questa palla ha un po' di limiti*
12 - *come si costruisce lo spazio? Quanto ne resta se ci metti dentro qualcosa?*
8 - *lo spazio si crea da solo? Lo spazio si può definire grande, piccolo, medio o largo?*

Alla fine della discussione i ragazzi scrivono su un foglietto che cosa è lo spazio secondo loro, e si raccolgono le varie idee: lo spazio tra le parole, lo spazio di una stanza grande, lo spazio infinito fuori dalla Terra: "vedi un cielo scuro dove ci sono le stelle e quello è lo spazio", oppure: "tra una cosa e l'altra ci può essere uno spazio grande, o piccolo, o piccolissimo".
Non è certo facile orientare la curiosità e la ricchezza esperienziale dei ragazzi in un percorso, limitato nel tempo, che proponga loro di trasformare lo spazio infinito in uno più adatto a ragionare su alcuni temi di geometria. I ragazzi usano un linguaggio in cui le parole quotidiane hanno significati molto concreti e su questo bisognerà costruirne e condividerne un altro, capace di esprimere con maggior precisione un pensiero astratto di tipo geometrico. Bisogna far entrare parole come " spazio, forma, metro, dritto, piatto, angolo, parallelo..." in un contesto che spesso ne altera il significato abituale e che, al tempo stesso, le arricchisce in precisione ma ne impoverisce le potenzialità di espressione.
Lavorare con oggetti concreti, muovere le mani, provare modi diversi per risolvere i compiti proposti dal maestro fa parte della vita di ogni giorno. E per capire se lo spazio è veramente piccolo, medio o largo... cosa c'è di più semplice che misurarlo?
Il problema dello spazio non si risolve ma si trasforma in attività che i bambini possono effettiva-

mente svolgere. Infatti il maestro tira fuori dal suo inesauribile armadio delle strisce di cartoncino regalate, come spesso succede, da qualche copisteria, le distribuisce ai gruppi di lavoro formati da quattro o cinque bambini e domanda: le strisce sono tutte uguali? Ogni striscia è più o meno lunga del banco? Ogni striscia è più o meno lunga di un metro? I ragazzi, in gruppo, fanno le loro prove e dopo una mezz'oretta di lavoro, ci si riunisce nuovamente in cerchio per discutere i vari risultati. Il maestro, come se ricordasse in quel momento di cosa si stava parlando, domanda ancora: le strisce sono più o meno lunghe di un metro? Ma che cosa è un metro?
Nella discussione si incontrano e si completano reciprocamente conoscenze, esperienze, idee peregrine, parole di cui bisognerà gradualmente precisare il significato.

11 - *un metro è la lunghezza*
- *serve per misurare una cosa lunga, ce ne sono altri che servono per misurare le cose larghe*
- *è una cosa lunga, è una certa misura*
1 - *è 1000 mm, uno spazio piccolissimo, che dieci formano un cm e poi 10 cm, quando si arriva a 100 diventa un metro, poi arriva a due metri, poi arriva a dieci metri. È una misura sempre alta un metro, se la striscia fosse più lunga, potrei piegarla fino a un metro, se è più corta... non si può allungare*
10 - *un metro non è solo quello fatto apposta: si possono segnare i numeri, anche sulla striscia*
Maestro - (unisce due strisce - e rivolto a Massimo): *allora se scrivo i numeri qui sopra diventa questo un metro?*
10 - *serve per misurare le cose*
Maestro - *anche il vino per esempio?*
10 - *non quanti litri di vino ma quanto è alta la bottiglia.*

Fa parte della strategia didattica del maestro non mettere mai in evidenza la correttezza di alcune risposte ma piuttosto portare l'attenzione sulle ambiguità di altre: non basta scrivere dei numeri sulla striscia per farla diventare un metro; tra le cose da misurare col metro potrebbe esserci anche il vino, ma questa volta la sua provocazione riceve una risposta adeguata, secca e precisa. Le difficoltà del cosa e come misurare rappresenteranno un motivo ricorrente in tante e diverse attività, per risolverle gradualmente confrontando ogni volta varie opinioni e vari metodi. La concretezza degli oggetti da misurare, i gesti per farlo e gli strumenti necessari costruiscono la base percettiva su cui si fondano i ragionamenti che danno significato alle attività di misura.

2. Dritto come... il raggio di vista

Oggi si discute sul meccanismo della visione: cosa si vede con due occhi, con un occhio solo...
I ragazzi cercano di spiegare cosa succede quando si guarda e alcuni di loro, come i fisiologi medioevali, immaginano che sia l'occhio a mandare un raggio di vista capace di vedere gli oggetti.

5 - *il raggio è come mandato dalla pupilla, se il buchino dell'occhio che collega poi al cervello si gira, girando tutto l'occhio, ecco che il raggio di vista vede, per esempio, la cartina geografica,se invece si gira dall'altra, vede il termosifone, la finestra...*
Il Maestro vuol sapere cosa si prova quando si cerca di mettere a fuoco oggetti posti a diversa distanza, o che non sono ben allineati.
Maria - *perché ti sei spostato per vedere la faccia del maestro e la penna che il maestro tiene in mano?*
13 - *la vedevo lo stesso, ma non era sulla traiettoria, la penna non stava sulla faccia, sulla traiettoria della faccia.*

Quindi bisogna cercare di materializzare in qualche modo questo raggio di vista, individuarne la traiettoria, capire meglio da dove parte e dove arriva, e forse si può provare a dirigerlo nello spazio, per esempio facendolo passare in un tubo di cartone:

Fig. 1 - Il raggio di vista

Maria - *ce la faresti a far entrare un raggio di vista qui dentro?*
Molti si dichiarano capaci e provano a farlo.
Maria - *ma se tu vuoi guardare quel cartello lassù, come lo devi mandare il tuo raggio di vista?*
3 - *alto*
Maria - *metti il tubo in posizione verso il cartello, e poi guarda se va bene*
3 - *lo vedo - bum - colpito.*

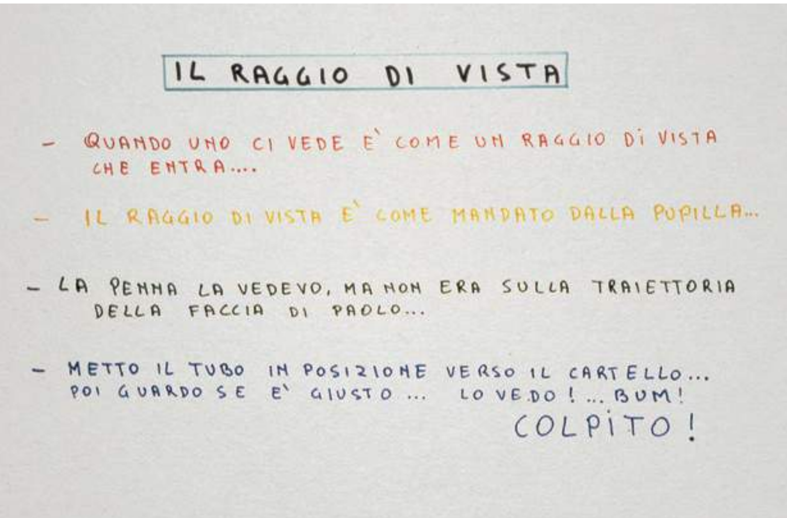


Fig. 2 - Cartellone: "il raggio di vista"

Fig. 3 - Cartellone: che cosa significa "dritto"?

Dunque il raggio di vista va dritto come un treno in una galleria, va dritto come un proiettile sparato da un fucile. Il tubo accostato all'occhio ne indirizza la traiettoria e raggiunge il bersaglio con maggior precisione se il tubo è lungo e stretto perché.... è vero che il raggio di vista va dritto ma poi si allarga indietreggiando e più ci si allontana più si allarga.

I ragazzi provano tutti a guardare dirigendo i loro raggi di vista con i tubi di cartone lunghi o corti, larghi o stretti e la conclusione cui portano le varie prove è che il raggio non fa mai curve, si allarga ma va sempre dritto.
Competenze fisiche, linguistiche e geometriche si accrescono insieme: si parla di luce e si scopre che i raggi - anche quelli di vista - vanno dritti e non si piegano a "colpire"oggetti non allineati col tubo di cartone. Il raggio diventa prototipo della linea retta, e si scopre che per due punti (l'occhio e l'oggetto) passa una sola retta: la linea-raggio viene immaginata astraendola da ogni riferimento materiale, tanto che non viene neppure disegnata, e la parola "dritto" diventa oggetto di interessanti discussioni.

Infatti, bisogna "precisare" (ecco un termine molto importante per il maestro e i suoi ragazzi) il significato della parola "dritto", imparando non solo ad usare i termini in modo appropriato ma anche a sviluppare l'astrazione necessaria per immaginare la retta nello spazio, come dirà Leo, o sul piano - la "pianura", come suggerisce Massimo.

Ecco un frammento di discussione:

Maestro - *secondo voi che cosa significa dritto*
12 - *per me è come questo: dritto*
5 - *dritto significa dritto*
- *dritto è una cosa che non è storta*
5 - *e che significa storto?*
15 - *la linea è dritta, anche se la metti in orizzontale o in verticale o obliqua: è sempre dritta. Storto potrebbe essere anche un cerchio, perché gira in tondo, non è dritto un cerchio*
14 - *per esempio il filo del proiettore, così è tutto storto, però se tu lo stendi è dritto! ora è tutto a curve..*
10 - *...e per farlo diventare dritto lo devi stendere. Così non è che è proprio dritto, devi avere la pianura dove è dritto, allora diventa dritto!*
Maria - *dice Donata che così è dritto sicuramente, anche senza avere la pianura*
10 - *no, deve avere una pianura*
11 - *se io disegno una linea diagonale, quella è dritta a meno che non abbia angoli o curve o cose così.*

Ritornando alle "cose" dritte, Marco cerca di individuare segmenti di retta guardandone l'inizio e la fine, ricordando che se le linee sono appoggiate su una superficie curva - come quella della Terra - non possono essere dritte...

1 - *per me una cosa dritta bisogna vedere dove comincia e dove finisce, perché se cominci da qua fino a qua, può essere dritta: se cominci a guardare da qua (un lato della squadra fino all'angolo) è storto, poi vai qua ed è dritto, questo è un angolo retto; perciò una linea dritta devi dire da dove comincia e dove finisce, non puoi dire vado dritto anche su una una strada dritta, la puoi fare di due metri o tre metri, ma non tanto, perchè la terra è una sfera e non c'è un posto in cui è piatta, per cui se vai dritto, te ne vai!*

Il gusto di ribattere e precisare caratterizza gli interventi dei ragazzi seduti in cerchio: le discussioni si svolgono chiedendo la parola oppure seguendo l'ordine del cerchio, in modo che tutti abbiano l'opportunità di dire la loro. C'è chi parla più volentieri e chi parla poco, ci sono dibattiti a due o a tre, ci sono momenti di discussione accesa, in cui traspare l'importanza data dal maestro alla capacità di esprimersi in maniera chiara e corretta:

17 - *non ho specificato "tutto l'insieme", e non ho specificato nemmeno il lato: io ho detto...*
5 - *e hai fatto male, perché allora a me mi sorge il dubbio su come specifichi dritto, su come specifichi curvo, su come specifichi angolo, tu non hai specificato niente, hai detto solo che dritte sono le cose che non hanno curve. Lo dovevi specificare.*

Fig. 4 - Dritto come un filo teso sulla "pianura"

Fig. 5 - Dritto come un elastico teso

Fig. 6 - **7** - Dritto come il lato della squadra

3. Linee dritte e superfici curve: le geodetiche

Il lavoro sullo spazio prosegue con una attività pratica di ricerca sul "dritto": vengono dati ai ragazzi degli oggetti di varia forma (imbuti, recipienti cilindrici, bottiglie, solidi geometrici, scatole...) e si chiede loro di disegnarvi sopra delle linee dritte. I ragazzi si impegnano a tracciare linee con i pennarelli ma i risultati lasciano alcuni di loro molto perplessi. Certamente le linee tracciate sono dritte ma... la superficie su cui sono state tracciate è curva.
E allora?
Come si risolve il problema?

Fig. 8 - **9** - **10** - Dritto su superfici curve

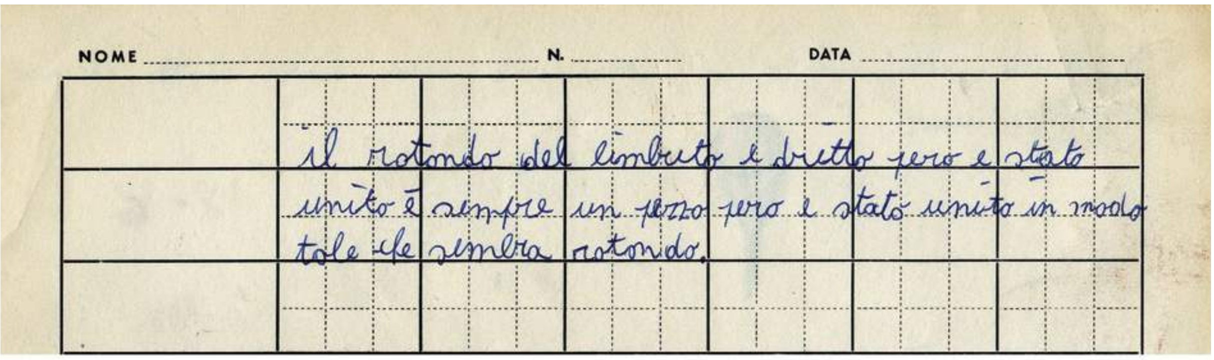


Fig. 11 - **12** - Lavori dei bambini

Si comincia a parlare di punti di vista: in che modo bisogna guardare per capire che cosa è dritto? Parole ed esperienza si intrecciano, gli esempi che vengono portati mettono in evidenza capacità dialettiche, osservazioni minuziose, ragionamenti accurati, talvolta portati fino all'assurdo. Sembra evidente che le stesse parole possono assumere diversi significati nelle varie circostanze e quindi è necessario precisarne il contesto d'uso ma anche specificare quello che si sta guardando e come si sta guardando, perchè i diversi termini possano finalmente essere condivisi.

> 6 - (lavorando sull'imbuto): *questo rotondo qui, che voi dite che è rotondo, è una linea dritta, solo che l'hanno unita e viene un rotondo*
> 1 - *è dritto solo che è rotondo*
> 5 - *la linea che fai è dritta ma il recipiente non è piatto*
> - *è come se ci fossero due tipi di dritto: dritto in piano e dritto su curva.*
> Paolo - *bisognerebbe discutere anche su che cosa è storto: perché avete detto che una cosa non è dritta quando fa le onde, quando va tutta così, oppure quando fa un angolo... per esempio questo elastico è dritto o no?*

Quando negli anni successivi i ragazzi studieranno meridiani e paralleli forse ricorderanno il problema del dritto-rotondo e, forse, si meraviglieranno osservando le nuove proprietà dei triangoli disegnati su superfici che non sono piane.

> In Geometria, la linea viene definita come una serie infinita di punti adimensionali che si succedono in modo "continuo"; la linea ha dunque una sola dimensione, la lunghezza, e manca di larghezza e di profondità.
> La linea può essere retta, spezzata o curva. La linea curva si può immaginare generata da un unico punto che si muove casualmente sul piano o nello spazio. La retta, definita da Euclide nei suoi Elementi come un concetto primitivo, è un ente geometrico immateriale senza spessore, ha una sola dimensione, la lunghezza, è illimitata in entrambe le direzioni e cioè infinita

F. Enriques, **U. Amaldi**, *Elementi di geometria*, 1955

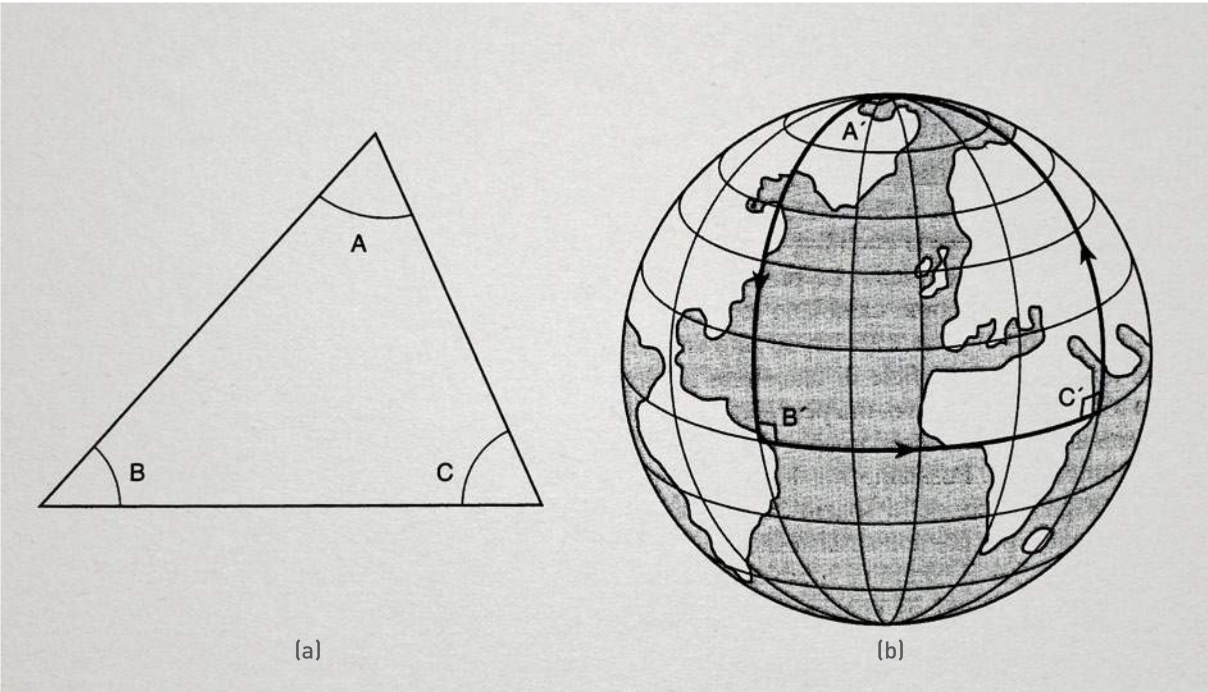


Fig. 13 - **(a)** La somma degli angoli interni (a + b + c) di un triangolo tracciato su un foglio di carta è pari a 180°. **(b)** La somma degli angoli interni di un triangolo tracciato sulla superficie di una sfera è sempre superiore a 180°. Il triangolo qui rappresentato ha tre angoli da 90°.

4. Dalla retta al piano

Le caratteristiche delle superfici piane o curve e la possibilità di appogiarvi sopra stecchini dritti, di disegnarvi sopra delle linee dritte, aiutano (forse) a percepire alcune proprietà della retta geometrica astratta, per esempio immaginandola staccata dalla superficie su cui è disegnata, e proseguita all'infinito. Per analogia o per contrasto, l'esperienza concreta viene generalizzata e guida la costruzione delle astrazioni necessarie ad entrare nel mondo della geometria. Analogamente le osservazioni sulla piattezza, attraverso non poche contraddizioni, possono portare a comprendere le proprietà del piano bidimensionale (e le caratteristiche delle rette che "giacciono" sul piano).

Fig. 14 - Camminare dritto

Paolo - *se metto per terra questo filo elettrico, ben schiacciato, può essere che qualcuno dica che è storto, e qualcun altro può dire che è dritto, perché guardandolo così si vede tutto dritto. Anche l'imbuto è tondo ma se si guarda per davanti si vede dritto*
5 - *per me bisogna dire che ci stanno due cose, la piattezza e la drittezza*
Maestro - *questa è una piattaforma dritta: anche le cose che stanno sopra sono dritte? e se ci metto sopra questo elastico che è storto: secondo te è dritto ?*
13 - *non lo so dire, la piattaforma sotto però...*
1 - *io non credo che sia dritto*
14 - *se una piattaforma è dritta, è una cosa dritta, e magari la cosa che ci è appoggiata sopra è storta. Per me la piattaforma è sempre dritta, la cosa è storta.*

Non tutti sono convinti o sono disposti a lasciarsi convincere dalle osservazioni dei compagni: gli esempi si arricchiscono di nuovi dettagli, i gesti accompagnano le dimostrazioni, l'intero corpo prende parte al complesso processo di comprensione di qualcosa che sembra evidente ma che, al tempo stesso, sfugge alle definizioni che tentano di limitarlo o ingabbiarlo. Infatti, le definizioni di dritto e di piatto si intrecciano all'evidenza degli esempi, che a volte le sostengono ma altre volte le mettono in discussione. Ed è importante notare come, in classe, tutti i diversi punti di vista trovano il loro spazio di espressione e di attenzione da parte dei compagni, che siano in accordo o in disaccordo. Le opinioni che sembrano divergenti vengono comunque prese in considerazione, secondo una metodologia che evita il condizionamento indotto dalle risposte convenzionali, forse "giuste" ma certo non pensate. E sono proprio le osservazioni accurate dei fatti che evitano i rapidi conformismi , gli automatismi mnemonici o l'abitudine a rispondere senza riflettere. Oggi, per esempio, qualcuno nota che gli spessori degli oggetti o del corpo rendono impossibile la vera "piattezza", e subito il maestro provoca i ragazzi chiedendo loro di trovare un modo per "camminare piatto" visto che riescono così bene a "camminare dritto". Non è facile immaginare un piano senza spessore, assolutamente bidimensionale e, soprattutto, trasferire mentalmente la piattezza di un oggetto (con o senza spessore) alla piattezza di un movimento (il camminare o il muoversi). Anche in queste situazioni, l'esperienza di un mondo a tre dimensioni entra in conflitto con la astrazione geometrica che i bambini dovranno gradualmente conquistare.

Si comincia a notare la differenza di significato tra "piatto" e "piano". Del resto, in geometria il piano è un concetto primitivo e non se ne danno definizioni in quanto si suppone che sia intuitivamente comprensibile. Proprio per questo è importante che i ragazzi cerchino tra loro esperienze e parole per esprimere e condividere qualcosa che dovrebbe essere percettivamente evidente.
Per camminare "piatti" i ragazzi si mettono a strisciare sul pavimento o lungo le pareti, cercando di non sollevare nessuna parte del corpo: il gioco è divertente ma i corpi continuano a conservare la loro terza dimensione. Qualcuno nota la piattezza delle ombre e cerca di sfruttare il sole che entra dai finestroni per far muovere ombre "piatte".

Maestro - *15 doveva camminare dritto, e dice che lo ha fatto. Ma che cosa è dritto?*
15 - *la traiettoria*
2 - *secondo me una cosa dritta non ha curve, quel filo fino a li è dritto, poi è storto, per me più o meno è lo stesso dire dritto o dire piatto*
Maestro - *allora se io ti dico: cammina dritto, oppure cammina piatto per tutto il corridoio, tu come*

cammini?
- cammini steso
16 - *non è possibile*
17 - *per me camminare piatto non ha significato, almeno per quanto ne so*
11 - *piatto non si può camminare*
12 - prova, camminando rigido e saltellando a piedi uniti
Paolo - *tu hai camminato dritto, ma che cosa era dritto*
13 - *è dritto il corpo, ma è dritto anche come andava*
12 - *è dritto il corpo*

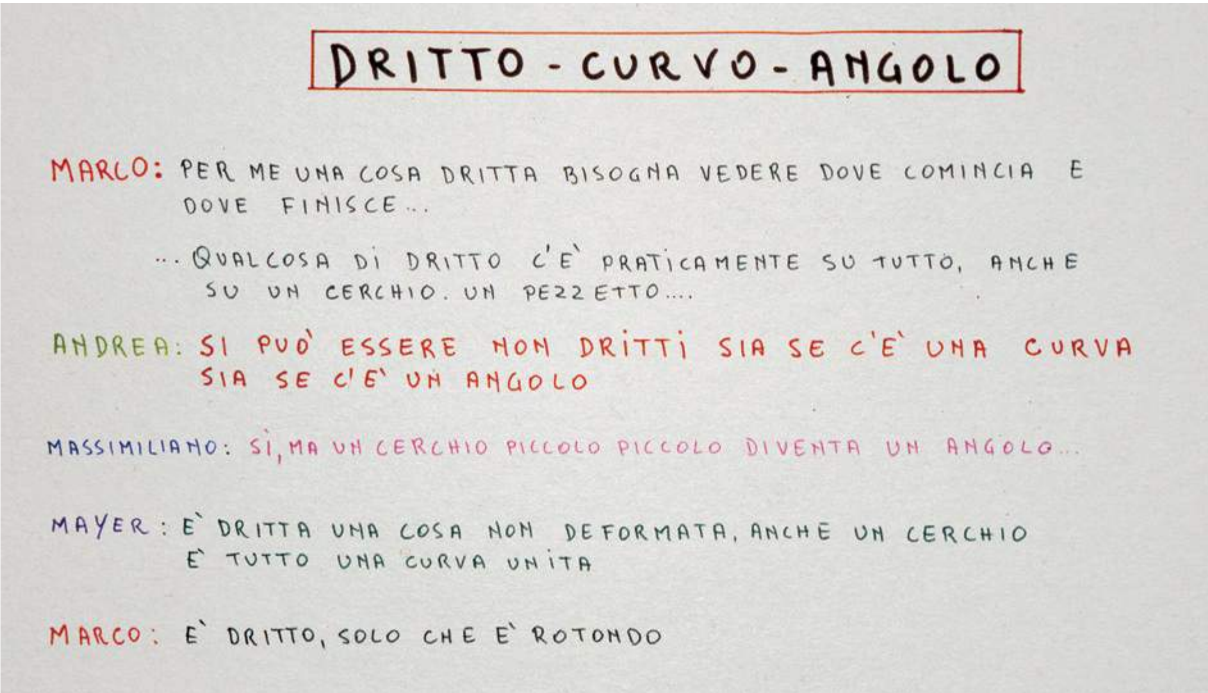


Fig. 15 - Cartellone: "Dritto - curvo - angolo"

Fig. 16 - Cartellone: "Dritto e piatto"

5 e 2 - *uno se volesse camminare piatto dovrebbe sdraiarsi per terra e camminare*
10 - *io mi metto dritto e cammino piatto*
- *io ho capito come si fa a camminare piatto, così, strisciando*
Maestro - *ma tu sei piatto o no?*
17 - *ma non può essere piatto, è assurdo*
5 - *camminare piatto non si può, ossia dipende, se te intendi piatto che io cammino così, sdraiato per terra, ma non puoi camminare piatto*
Maria - *e un verme può camminare piatto?*
5 - *neppure un verme, neanche le pulci, forse un verme spiaccicato*
Maria - *un'ombra può camminare piatta?*
- *si*
- *no*
5 - *che c'entra, l'ombra è l'ombra.*

Bisogna anche decidere quale degli infiniti piani nello spazio si vuole guardare:

Paolo - *io ho questo disco che è piatto, se lo faccio camminare così, strisciandolo sul tavolino, cammina piatto? E se lo faccio camminare rotolando sullo stesso tavolino cammina piatto lo stesso?*
- *no.*

L'esperienza fisica aiuta: e l'osservazione del comportamento dell'acqua che ha sempre una superficie "piatta" mentre spesso le sue gocce camminano "dritte", è alla base delle riflessioni di Marco:

1 - *vorrei dire che su una superficie piatta, se metti dell'acqua se metti cinque gocce, cammina praticamente dritta, perché prima è accumulata, poi si spiana la superficie, ed è dritta, come questo.*

Attività: **I livelli dell'acqua**

Si distribuiscono dei recipienti di perspex con queste indicazioni di lavoro:

- **mettete un pochino di acqua in tutti i recipienti, poi guardate la forma dell'acqua, il modo in cui si dispone. Una volta messa l'acqua nei recipienti, guardate cosa c'è di dritto e cosa c'è di piatto e segnatelo su un foglio di carta. Con i pennarelli, sulle pareti del recipienti, fate dei segni al livello a cui arriva l'acqua, e disegnate il limite a cui arriva l'acqua.**
  Cercate ancora il dritto e il piatto;
- **poi potete muovere l'acqua, metterla in un altro modo e fare ancora un segno dove arriva il livello: guardare ancora se è dritta e come è dritta, guardate il dritto e il piatto nelle strane forme che riuscirete a dare ai livelli dell'acqua;**
- **potreste attaccare sul recipiente del filo di rame e dello scotch, metterlo ben preciso intorno a dove arriva il livello l'acqua e vedere che strane forme vengono fuori.**

Fig. 17 - **18** - **19** - Disegnare i livelli dell'acqua: linee dritte e piani piatti e orizzontali

Fig. 20 - Il livello piatto di un'acqua triangolare

5. Linee e figure

La sfida di oggi porta i ragazzi a lavorare sulle "traiettorie" cioè sulle tracce lasciate da oggetti in movimento.
In cerchio, accoccolati sul pavimento, i ragazzi guardano e commentano le richieste che di volta in volta vengono fatte e il modo in cui qualcuno di loro cerca di eseguire il compito proposto.
Così si chiede di disegnare una linea dritta avendo in mano un cerchio (per esempio, facendolo rotolare in un certo modo), o uno spago, o un listello di cartone, o di disegnare un cerchio disponendo di una squadra, o di una pallina, o di una corda e di una matita.
Si propongono anche gli esercizi inversi: sul foglio disteso in terra sono già disegnate delle figure, e i ragazzi devono disporre i loro "strumenti" per realizzarle.
Per esempio, è possibile disporre sul foglio un cartoncino da usare come strumento per disegnare due righe dritte?

> Maestro - *Qui sono disegnate due righe, e vorrei che qualcuno mi dicesse come si può mettere questo cartone per fare due righe come queste; senza spostare il cartone, naturalmente.*
> *Bisogna mettere il cartone in modo che in una volta sola si possono disegnare tutte e due le righe*

Le soluzioni sono varie, e bisogna sempre trovarne di nuove ma le righe sono lontane e il cartone è stretto:

> Paolo - *3 ha fatto ad occhio, e lo ha fatto abbastanza bene. Adesso prova tu, le stesse due righe, e lo stesso cartone verde, ma in modo diverso*
> 13 - *si può spezzare?*
> Paolo - *no, e questa volta senza piegarlo*
> 12 - *facilissimo*
> 11 - *si possono fare anche più in qua?*
> Paolo - *no devi farle proprio come quelle due, e non più vicine, senza muovere il cartone.*

Le richieste diventano sempre più complesse, ma è anche importante precisare i limiti e le caratteristiche degli "errori consentiti":

Maestro - *Intanto Mayer dice come si può fare un tondo perfetto servendosi della stessa striscia. Intendiamoci però su quello che vuol dire perfetto, per esempio se viene un cerchio un pò tremolante per via della mano, per me sarebbe lo stesso un bel cerchio perfetto: invece questo qui non è un cerchio, e neppure perfetto.*

Non tutti i compiti possono essere realizzati:

- *si può bucare?*
Maestro - *no, ma si può dire che questo compito non si può realizzare! ci sono delle cose che si possono fare e delle altre che non si possono fare. Anche questa è una cosa che bisogna imparare a capire.*

Fig. 21 - **22** - **23** - **24** - **25** -Diversi modi di disegnare cerchi

Fig. 26 - **27** - Proviamo a disegnare cerchi

6. Conclusioni sul "piatto"

Per continuare a lavorare sul concetto di piatto o di piano si cominciano a cercare e a confrontare oggetti piatti… e vengono fuori altre caratteristiche degli oggetti stessi.

3 - *questo pezzo di banco è piatto, il pavimento è piatto, questo pezzo di polistirolo è piatto*
Maria - *è piatto anche se non è perfettamente liscio, e certamente il pavimento è più liscio di questo che è più ruvido*
Paolo - *allora ci sono delle cose* ***piatte e lisce****, e cose* ***piatte e non lisce****, e altre che sono* ***lisce e non piatte****.*
Per esempio questo cartone è liscio, e se lo metto così è anche piatto o no?
- Sì, il cartone è piatto ed è liscio…

Subito i bambini trovano delle cose che sono sempre piatte, e delle cose che sono piatte solo se uno le tiene ferme in certe posizioni. Di nuovo si cerca di distinguere i significati di dritto, piatto e liscio… ma compaiono subito altre proprietà di cui bisogna tener conto. È didatticamente importante l'invito del maestro a cercare (o a definire) un campione-prototipo della proprietà che si vuole analizzare: si cerca un campione di "piattezza" a cui fa seguito un campione di "liscezza" .
Così i ragazzi potranno trovare oggetti più o meno piatti o più o meno lisci confrontandoli ogni volta col loro campione. I confronti sono ovviamente guidati dagli occhi o dai gesti che sfiorano le superfici cercando le differenze, ma intanto si imparano cose importanti: la strategia del confronto e la strategia delle "relazioni d'ordine", che permette di valutare e ordinare "dal più al meno" certe proprietà degli oggetti riferendosi ad una situazione "zero", individuata appunto dal campione. Quando si lavorerà sugli angoli, per esempio, il campione di angolo retto sarà l'angolo retto della squadra. Oggi, per continuare il lavoro si sceglie come "campione di piatto" una lastra di perspex e si decide che se le cose si appoggiano tutte e perfettamente sul campione di piatto scelto… allora sono piatte. Le strisce di cartoncino appoggiate sul perspex sono dunque piatte ma, appena si prendono in mano, si incurvano. Si può essere "piatti in verticale"? e la striscia di cartone che si piega tenendola in mano, continua ad essere piatta anche se curva? Ecco ancora la confusione linguistica tra piatto, piano, liscio, curvo, flessibile… ma ci si accorge anche che talvolta è difficile distinguere le proprietà fisiche che riguardano caratteristiche concrete della materia dalle proprietà geometriche che richiedono esercizi di astrazione.

5 - *ci sono delle cose che sono piatte sempre, e delle cose che sono piatte a seconda della posizione in cui si mettono*
Maestro - *vogliamo trovare una parola per dire le cose che sono piatte sempre?*
5 - *sono le cose che non si possono piegare, come il perpex*
- Le inflessibili
Maestro - *ecco ancora altre due distinzioni da fare: ci sono cose flessibili e quelle che non sono flessibili: le* ***non flessibili****.*

Dal cartoncino, si ritaglia un cerchio su cui la discussione continua, avviandosi in nuove direzioni.

1 - *questo è liscio e piatto ma dritto non lo è, perciò piatto è piatto ma non è dritto*
Paolo - *vi starebbe bene dire che è curvo?*
- è un cerchio completo
- è curvo come la terra
Paolo - (prende una palla) *vi sta bene dire che questa è curva?*
- no, è sferica
Paolo - *è piatta?*
- no, da nessuna parte
Paolo - *è curva ?*

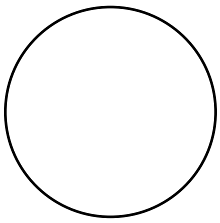
- *si, la palla è tutta curva!*
- *quando è curva su tutti i lati si chiama sfera, è sferica*
- *la striscia è a cerchio, e la palla è a sfera*

Maestro - *possiamo confrontare la palla col campione di piatto?*
- *no, non ce la puoi mettere sopra!*
- *si, ce la puoi mettere, ma tocca un pezzo solo, mentre un vero piatto lo occupa tutto!*

Paolo - *ti sei un pò imbrogliato da solo, perché abbiamo appena detto che chiamiamo piatto quello che va sul nostro campione di piatto, però ora che abbiamo capito che cosa è piatto, stiamo trovando due tipi di curvo: uno è il tipo di curvo tondo e piatto, che si appoggia tutto come il cartoncino, l'altro è quello della sfera che si appoggia sul piatto, un pò per volta*

11 - *uno è tondo, mentre quell'altro è sferico*
- *è tondo in tutti i sensi.*

7. Che cosa è un cerchio?



> “Alcuni bambini ragionano proprio come Euclide, che considerava il cerchio come una figura bidimensionale. Altri invece seguono inconsapevolmente una matematica più moderna che chiama cerchio quello che Euclide chiamava circonferenza del cerchio”

Al maestro sembra necessario approfondire il concetto di cerchio: nella discussione appena fatta troppi bambini sembrano confusi e, ancora una volta, bisogna "precisare" i significati delle parole. Così il maestro disegna alla lavagna un bellissimo cerchio, e avvia la discussione domandando: Qual è il cerchio?

1 - *secondo me il cerchio è quello fuori, ma potrebbe essere anche quello dentro*
10 - *il cerchio ha il dentro. Quello che è senza niente dentro è la raffigurazione di un cerchio. Quello che invece ha un dentro, è un cerchio*
16 - *per me tutto, sia il dentro, sia il fuori*
- *per noi è solo contorno*

8 - *per me tutto il dentro è il cerchio*
5 - *se vuoi sapere l'area, allora il cerchio è dentro. Però il cerchio è solo il contorno*
18 - *per me normalmente è il contorno, però qualche volta può essere anche il dentro, se lo colori*
13 - *il cerchio è il dentro*
12 - *per me tutte e due le cose sono il cerchio, ossia il contorno e il dentro.*

Come sempre, la discussione si amplia, bisogna definire nuove parole e precisare le idee che di volta in volta vengono in testa, esemplificandole e dimostrandole attraverso gli oggetti a disposizione, disposti in mezzo al cerchio formato dai ragazzi. Si guardano le curve, gli angoli, gli spessori degli oggetti, affiorano ragionamenti complessi e astrazioni convincenti.

Paolo - *secondo te Max, quante curve ci sono in une cerchio disegnato?*
16 - *una*
- *è tutto una curva*

1 - *infinite*
11 - *è tutto una curva unita, è un cerchio*
17 - *è una curva sola, una curva unita all'inizio della curva stessa.*

8. Esercizi di astrazione: verso Flatlandia e il mondo piatto

Oggi il lavoro richiederà ai ragazzi un notevole sforzo di immaginazione e di coerenza: noi adulti abbiamo letto Flatlandia, il bel libro di Abbott su un immaginario mondo piatto e vogliamo vedere come i bambini che continuano a discutere sul dritto e sul piatto rispondono alla nostra proposta.
Gli sforzi per spiegare cosa ci aspettiamo (da parte nostra) e di capire cosa fare (da parte dei bambini) sono notevoli e bisogna rispondere alle non poche obiezioni che rendono difficile il passaggio concettuale da un universo reale ad un mondo immaginario. D'altra parte pensiamo che proprio una astrazione di questo tipo sia utile per ragionare sulle dimensioni dello spazio.
I primi postulati della geometria euclidea parlano di un punto senza dimensioni, di una linea con una sola dimensione, di un piano con solo due dimensioni... mentre ogni figura geometrica rappresenta una astrazione dalla figura geometrica disegnata sul quaderno, spesso resa particolarmente "concreta" mediante opportuni ritagli. Trascurare la terza dimensione, per bambini abituati a precisare le cose con estremo realismo è abbastanza difficile ma il gioco si presenta subito stimolante.

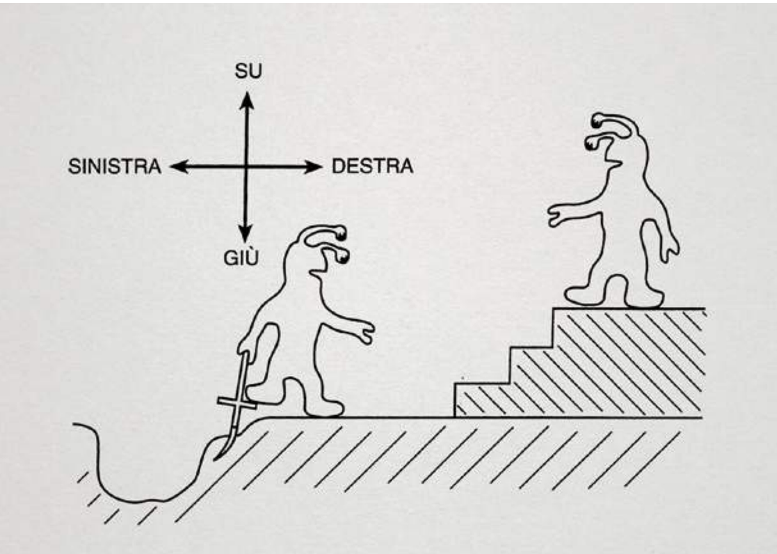


Fig. 28 - Gli esseri bidimensionali (2D) sono liberi di muoversi in su / in giù e a destra / a sinistra, ma non hanno accesso alla terza dimensione, che implicherebbe la possibilità di uscire dal foglio

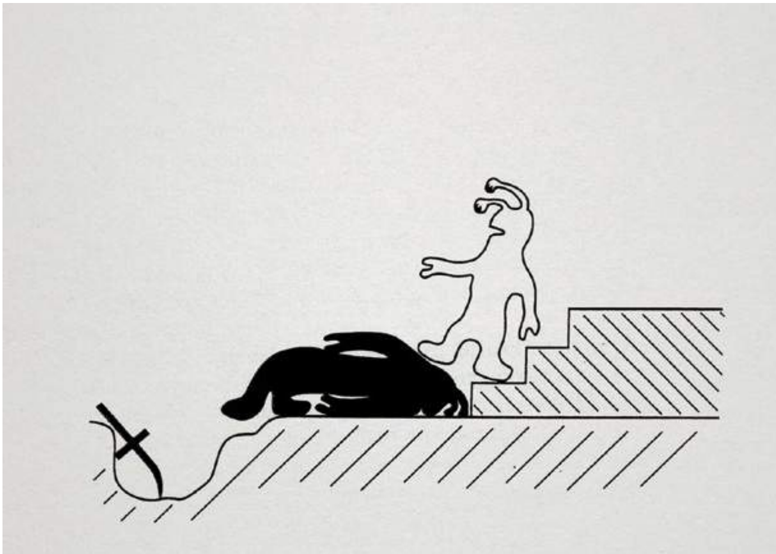


Fig. 29 - Ecco l'unico modo in cui un essere bidimensionale può oltrepassare un suo simile. I due non possono girarsi intorno, altrimenti uno di loro dovrebbe uscire dal foglio

Maestro - *quando voi guardate un cartone sullo schermo, le figure sono proprio piatte perché stanno sullo schermo piatto?*
- *ma c'è sempre un piccolo spessore*
11 - *no, forse lì non c'è lo spessore*
Maestro - *e questa figura qui, disegnata sul quaderno, ha spessore o no?*
12 - *un pò di spessore ce l'ha pure il colore, il pennarello, l'inchiostro*
Paolo - *possiamo dire che i disegni e le fotografie sono piatte, però possiamo immaginare che le cose disegnate non siano piatte. Adesso invece il gioco che dobbiamo fare è cercare di inventare come sarebbe un mondo che fosse proprio piatto... in cui lo spessore non ci fosse proprio. Vediamo come potrebbe essere fatto questo mondo solo piatto: anche le case, anche le scarpe, anche la roba da mangiare, tutto*
- *anche noi? anche i vestiti? anche la lavatrice?*
- *sì, anche se è un po' complicato*

- *se ce lo possiamo immaginare, poi possiamo disegnarlo?*
- *e i grattacieli come si possono fare, piatti?*
- *disegnare va beh, c'è lo spessore del pennarello o dell'inchiostro, comunque si potrebbe disegnare solo una faccia, invece che tutta una testa tridimensionale. Con l'altezza, lo spessore ti viene tridimensionale; invece per terra, se fai un cerchio così, senza tutte quelle cose complicate, invece che tridimensionale, sembra piatto*

Paolo - *è verissimo; però noi non volevamo fare disegni che comunque sono piatti, ma immaginarsi le cose che esistono come se fossero piatte: come sarebbe il mondo se tutto fosse piatto.*

Cominciamo a immaginare abitanti di questo strano mondo come se fossero sagome, costrette a muoversi strisciando sulla superficie del piano ma senza uscire da questa. Si possono spostare in su e in giù, a destra e a sinistra,ma non possono muoversi fuori dalla superficie. Non possono ruotare la testa e non possono guardarsi alle spalle se non mettendosi a testa in giù. Il maestro comincia a disegnare alla lavagna una persona e una casa, e si comincia subito a definire il significato dei segni tracciati. Una riga rappresenta un muro, un ostacolo che può essere aggirato ma non scavalcato, la persona deve "camminare piatto" come i bambini stessi avevano provato a fare un pò di tempo fa.

Maestro - *supponiamo che in questo mondo piatto questa riga rappresenti il terreno e adesso sul terreno io disegno una casa: questi sono i muri, e questo è il tetto; e supponiamo che questa sia una persona. Adesso io chiedo: dove deve stare la porta della casa perché la persona ci possa entrare dentro? Dove bisogna mettere la porta? Intanto pensateci tutti.*

Per cominciare bisogna pensare a dove questi abitanti devono avere gli occhi, perchè se li hanno come i nostri possono solo guardare nel vuoto. Forse sono solo figurine di profilo, con gli occhi subito sopra il naso, o con occhi che strisciano sopra la testa, come dei tentacoli.

Con molta fatica e con il contributo di tutti, il mondo piatto prende sempre maggiore consistenza: da assurdo e inverosimile, pieno di difficoltà quasi insormontabili diventa accessibile alla logica e alla immaginazione dei bambini.
Se due omini piatti si incontrano lungo una strada cosa succede? Come fanno a proseguire il cammino?
Le modalità per far entrare in casa l'omino sono all'inizio oggetto di scontri e discussioni, e mano a mano i ragionamenti si modellano sulle possibilità o impossibilità del mondo piatto. Discutendo insieme, disegnando e cancellando si apre una porta sul fianco della casa, si trovano almeno tre modi di chiuderla e di aprirla, si immagina come disegnare le scale per far arrivare l'omino al secondo piano. Massimo disegna un sistema di corde senza spessore che possono scorrere sul piano per andare da un piano all'altro della casa, si scoprono modi di giocare a palla a volo e Andrea inventa perfino una automobile e una bici (entrambe piatte) che tuttavia resistono con difficoltà alle critiche di Max.

13 - *questa è la mia macchina, quella che ho inventato*
Maria - *che cosa hai dovuto inventare, che cosa ti è stato difficile fare?*
13 - *le ruote e il motore*
Maria - *e come hai risolto il problema delle ruote?*
13 - *con gli sci*
12 - *le ruote è facilissimo*
- *io ho fatto un'automobile e una bici*
16 - *la bici non si può fare, perché la bici ha le ruote. Una bicicletta normale ha una ruota che potrebbe essere piatta, ma per reggere la ruota ci sono dei perni che la tengono. Anche la macchina ha le ruote così. Infatti non si può fare nemmeno l'automobile*
13 - *ma io l'ho fatta*
16 - *e allora la tua bici si piega*
14 - *allora tutto si piega! ma come fate a fare un nodo? io lo so fare*
Paolo - *ma si può fare un nodo in un mondo piatto?*

Restano aperti alcuni problemi di raccordo tra la geometria e la fisica: in un mondo piatto esiste la forza di gravità? Gli oggetti piatti, disegnati sulla lavagna, cadono o non cadono verso il basso? La casa aperta sul fianco crollerà? Come si regge il pezzo di muro tra due aperture? I pavimenti orizzontali hanno bisogno di linee verticali su cui appoggiarsi o restano appiccicati alla lavagna come se fossero sostenuti da calamite?

Si cerca il modo di fare dei ponti per passare sopra canali formati da linee ininterrotte, o per andare dalla parte destra alla parte sinistra della casa ma... il maestro interviene anche per concludere la discussione.

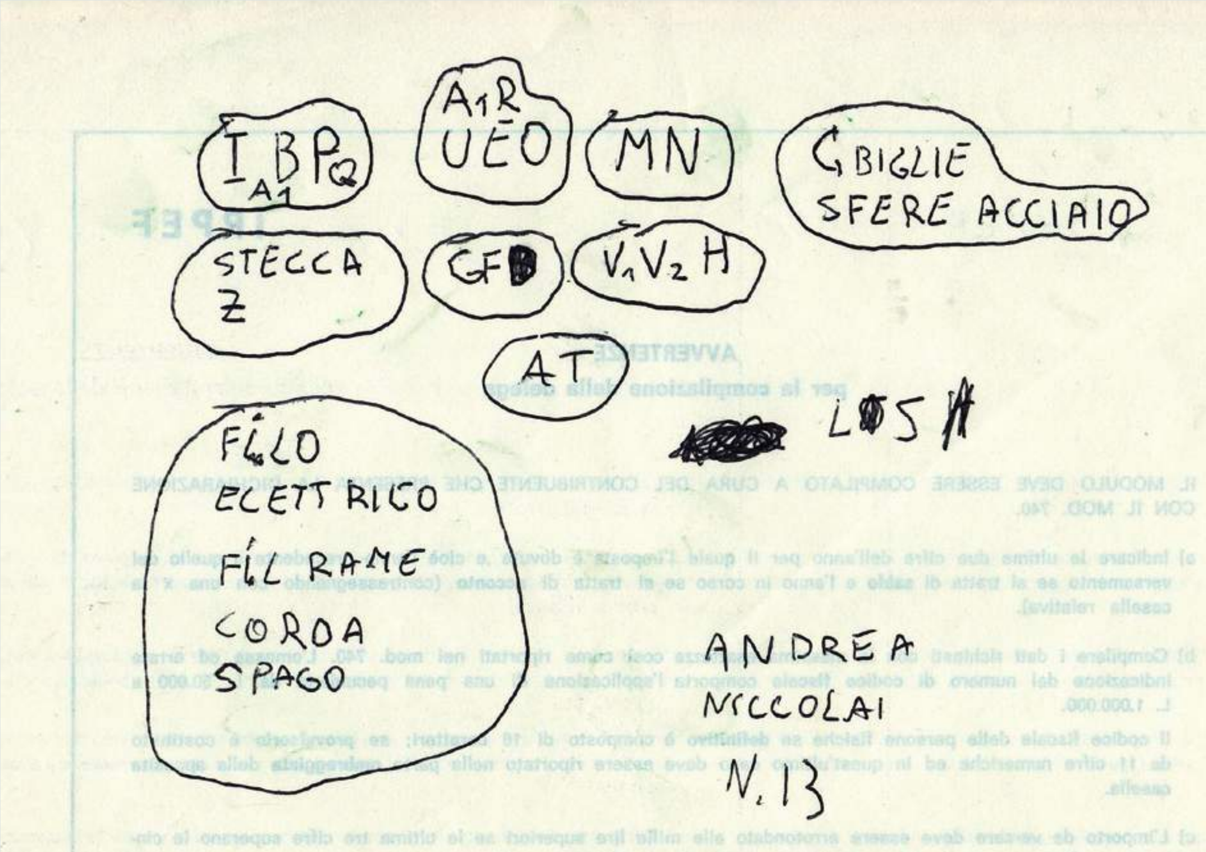
Maestro - *ma in un mondo piatto, un ponte che è? se è tutto piatto a che serve un ponte?*
10 - *c'è un problema di traffico*
Maestro - *se è un problema di traffico, non è un problema di ponte! se fate un ponte non è più piatto! Riuscite a fare un ponte piatto?*
- *secondo me non si fa*
13 - *ma sotto al mondo piatto, che c'è?*
Maestro, scherzando - *c'è un piatto, che fa da piatto al mondo piatto*
18 - *anche se il ponte è piatto occupa... uno spazio*

9. Forme di oggetti

Dal mondo immaginario che, sia pure con diverse difficoltà, sviluppa nei bambini incredibili capacità di astrazione, si torna al mondo degli oggetti concreti... per astrarne altre importanti caratteristiche. Si cominciano ad affrontare i problemi relativi alle somiglianze, alle similitudini e alla costanza delle forme indipendentemente dalla grandezza degli oggetti.
Così sull'abituale "palcoscenico", sul gran foglio di carta disposto in mezzo al cerchio dei bambini seduti sulle loro seggioline oggi sono disposti oggetti vari, dalle tazze da tè a bottiglie di varia forma, pezzi di legno, bicchieri, palline e biglie... scatole di fiammiferi, pacchetti di sigarette... corda, spago, filo elettrico, fil di ferro, stecchini... Ci sono anche pezzi di cartoncino ritagliati seguendo l'impronta della base di alcuni degli oggetti tridimensionali messi a disposizione. Ogni oggetto è contraddistinto da una lettera, in modo che il lavoro di raggruppamento venga agevolato. Ecco l'elenco degli oggetti contrassegnati dalle lettere:

[A] quadrato di polistirolo
[B] lastra di perspex (rettangolare)
[C] palla di gomma
[D] cerchio bianco
[E] scatola di fiammiferi svedesi
[F] disco di alluminio
[G] cerchio rosa (di carta, ricalcato su F)
[H] tappo di gomma
[I] cartone rosa (ricalcato su B)
[L] semi disco di perspex
[M] bicchiere piccolo
[N] bicchiere grande
[O] parallelepipedo di perspex
[P] faccia lunga di O
[Q] base di O - facce ricalcate su cartoncino rosa
[A1] faccia corta di O
[R] perspex piccolo
[S] perspex lungo
[T] cubo di plastica (spugna)
[U] pacchetto di MS
[V] tappi di sughero (cilindrici)
[Z] matita non temperata (cilindrica)
Stecca di legno cilindrica
fil di ferro
corda
filo elettrico
filo da cucire,
palline - biglie di vetro e di metallo

E il lavoro comincia, affrontando la difficoltà di passare concettualmente dalla materialità degli oggetti alla capacità di vederne solo la forma nello spazio.



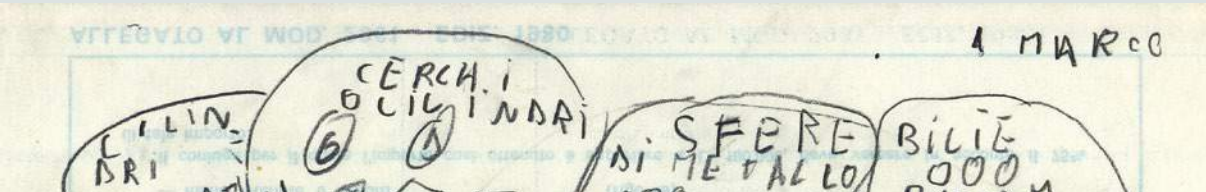


Fig. 30 - **31** - Esempi di classificazione per "forma"

Pablito - *Diamo un nome a tutti gli oggetti che metto qui sul foglio, poi fate dei gruppetti mettendoli insieme, considerando soltanto la loro forma, cioè le loro caratteristiche geometriche di forma.*

Dopo pochissimo tempo, le mani si allungano, gli oggetti vengono presi e spostati mentre i bambini spiegano le loro ragioni:

3 - *ho messo insieme palline di ferro, biglie e C: gruppo degli sferici*
13 - *io oltre alle sfere ci ho messo anche le palline schiacciate perché anche se sono diverse, e alcune sono sferiche e altre schiacciate, sono tutte rotonde*
- *questi sono oggetti rotondi si, ma sferici no*
Pablito - *ma un oggetto sferico è anche rotondo o no?*
1 - *sferico è anche rotondo, solo che rotondo è a due dimensioni*
- *sferico ne ha tre, ha anche la profondità*
2 - *quello è il gruppo dei cilindri*
23 - *puoi mettere anche i cilindri insieme agli sferici perché se quelli li schiacci, questi li allunghi*
3 - *poi c'è un gruppo dei piatti, ma non si possono mettere insieme i piatti, perché quelli alzati si chiamano in un modo speciale: i rettangoli alzati si chiamano parallelepipedi.*

Si ripropone il problema della tridimensionalità di tutti gli oggetti reali, in particolare quello dello spessore che riguarda anche oggetti sottili come le forme ritagliate dal cartoncino.
Inoltre, spostando o modificando la posizione degli oggetti appaiono nuove possibilità di raggruppamento. Ma come decidere cosa trascurare e cosa prendere in considerazione tra le varie caratteristiche geometriche che pure tutti possono vedere? Quando e che cosa astrarre, nella varietà delle forme a disposizione? È molto interessante vedere come i ragazzi sentano la necessità di rendere espliciti i criteri dei loro raggruppamenti , di spiegare cioè per quale caratteristica di forma mettono insieme diversi oggetti. E sempre il significato delle parole, con le sue varie inclusioni ed esclusioni, deve essere precisato.

Maestro - *adesso alzo di taglio la tavoletta di polistirolo. Ora si può mettere con qualcosa?*
- *se guardo il rettangolo dal bordo, lo spessore è un rettangolo!*
10 - *quello è pure rettangolo*
- *quello è parallelepipedo*
- *lo sai perché non li mette insieme, perché ha pure un pò di spessore, perché il pacchetto di cerini, le MS e il ghiaccio artificiale hanno uno spessore e quello no*
10 - *io dico che noi dobbiamo specificare perché li mettiamo insieme, per quale cosa pensiamo che vadano insieme: perché sono rettangolari, perché hanno lo spessore... io ho visto che finora è perché sono rettangolari, o perchè sono piatti*
Pablito - *allora piatti e rettangolari sono due cose diverse?*
14 - *io penso che un cartone avrà uno spessore, ma poco in confronto a una figura che ha già un suo spessore. si deve specificare se uno vede gli spessori o no; in quelli che ho raggruppato io vedo lo spessore, io li posso vedere da due punti di vista: se li vedo dall'alto, o non contando lo spessore, sono uguali*
3 - *se dici che questi hanno la stessa forma, vuoi dire che lo spessore è insignificante!* (cercano di trovare le facce ricalcate sul cartone e gli oggetti a cui corrispondono)
18 - *secondo me questo potrebbe essere l'inizio di un cilindro*
Pablito - *ma l'inizio di un cilindro è un cilindro?*
- *per me sta con i cilindri*

Guardando i tappi, Marco e Max cercano un criterio per distinguere quelli cilindrici da quelli troncoconici: e immaginano cosa succede dei "prolungamenti":

1 - *il tappo è sempre parallelo: se mandi una linea entra sempre,la linea non si restringe. In questo si restringe*

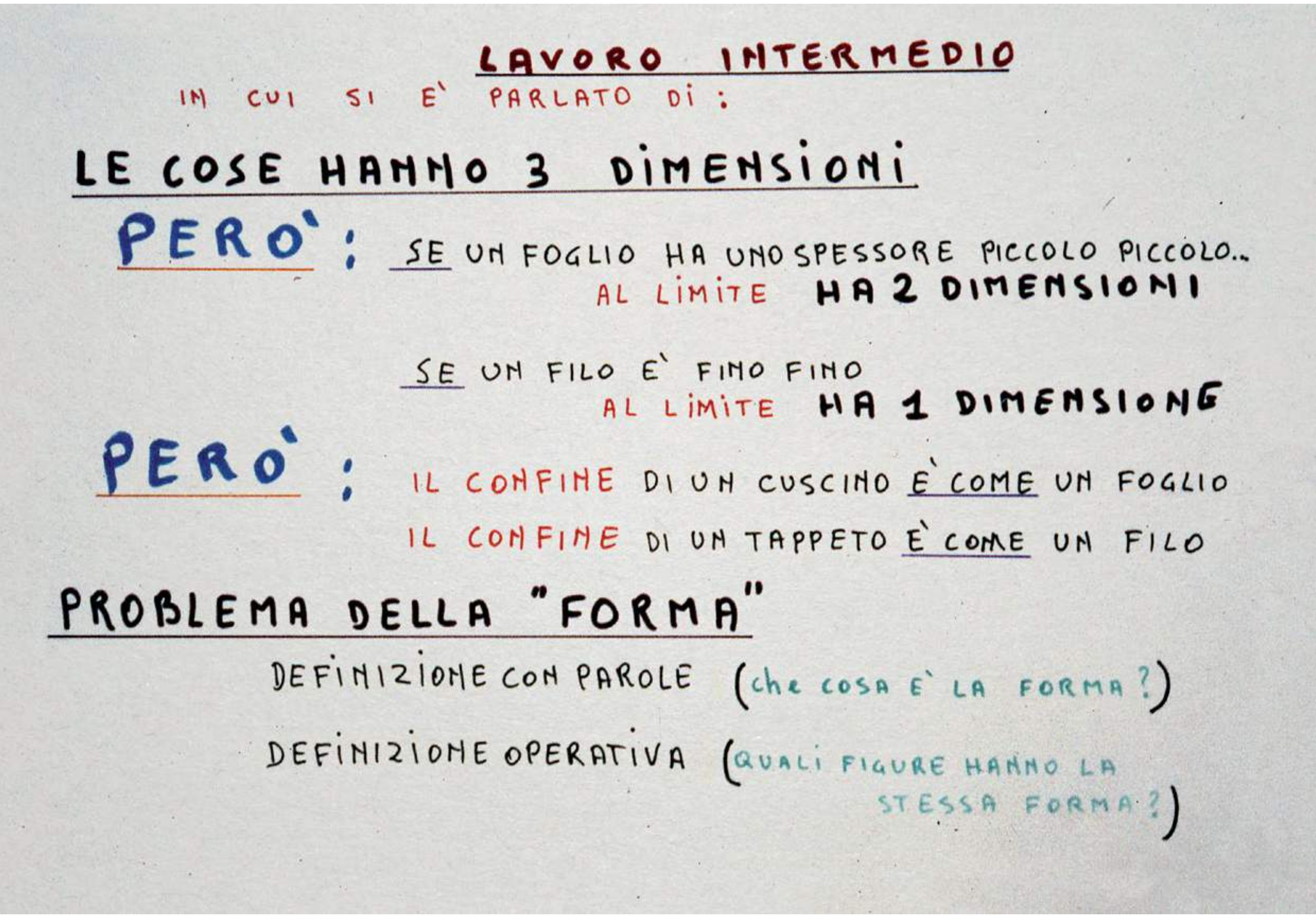


Fig. 32 - Cartellone sulle dimensioni dello spazio

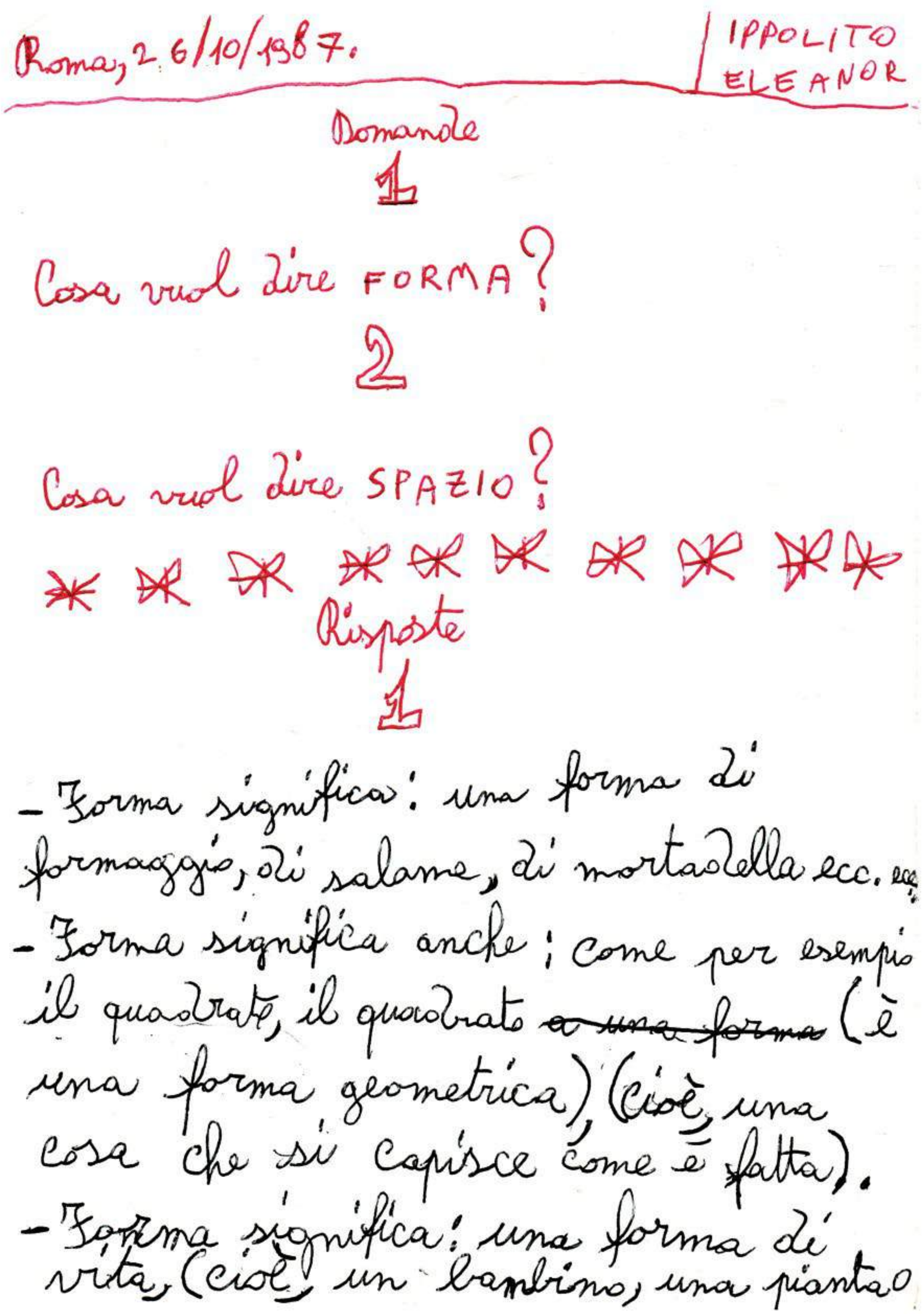
16 - *questo finisce a punta se lo continui, mentre l'altro no*
1 - *da una parte potrebbe ingrandire, continuare sempre, mentre dall'altra parte finisce. Prendi due righe... qui faccio le parallele, così faccio le diagonali*
Maria - *della corda - spago - filo elettrico - fil di ferro - stecco che ne facciamo?*
18 - *questo, cosi tagliato fa parte dei cubi*
- no dei cilindri?
1 - *questi possono stare insieme: li ho chiamati cilindri storti*
16 - *ma se li chiami cilindri piegati perché gli altri li chiamano corde?*
- e perché questo lo chiami tappo di sughero?
Maria - *Marco stava facendo un discorse sulle forme, mentre dire "corda" è un nome di forma o indica un'altra qualità?*
Maria - (a Marco) *i cilindri piegabili hanno tutti la stessa forma o no?*
1 - *forma cilindrica, ma sono cilindri, che possono assumere diverse forme all'esterno, per questo sono piegabili*
Maestro - *dici che sono cilindri che hanno forma di cilindro, e poi dici che possono avere forma diversa, che significa?*
1 - *rimane sempre fissa quella a cilindro, però la forma esterna, se fosse lungo lungo lo puoi piegare in tutti i modi, va bene è duro, ma si può piegare così, rimane sempre cilindro, perché non si può schiacciare.*

10. Forme

Dopo aver lavorato a lungo sulle forme degli oggetti e sui modi di raggrupparle diventa importante trovare le parole adatte a spiegare e a definire l'idea stessa di forma. Si tratta di una idea che in qualche modo è presente nella mente e nella esperienza di tutti, tutti sanno implicitamente cosa significhi forma, ma esplicitarne una definizione significativa che possa essere condivisa e generalizzata è tutt'altro problema. Ci aiuta nella discussione l'uso della lavagna luminosa, sempre alla portata dei ragazzi e disposta in modo da proiettare le ombre degli oggetti su un pezzo di parete bianca. Oggi la lavagna luminosa è un oggetto didatticamente obsoleto ma non è possibile dimenticare quanto il suo uso abituale abbia permesso al maestro (e a noi) di condividere problemi, di stimolare gesti e attività dei ragazzi, di osservare eventi strani, dal movimento dei lombrichi alla cristallizzazione della naftalina.

Quindi il maestro apre la discussione chiedendo ai ragazzi di spiegare che cosa significa forma: stimolate dalla domanda riaffiorano esperienze, esempi, modalità d'uso, frasi in cui questa parola ha un ruolo essenziale. Sono frequenti, nelle risposte, le associazioni tra "forma" e "cosa strana": è vero che molti affermano che ogni cosa ha una forma ma in realtà sono le forme inconsuete quelle che attirano l'attenzione ed eventualmente i ricordi. La parola "forma" fa ricordare le forme di formaggio, ma porta anche alla constatazione che "forma significa tutto, perchè tutto ha una forma", si parla di forme di vita, come i bambini e gli animali, e qualcuno ricorda anche le forme geometriche come il quadrato e il triangolo, aggiungendo come spiegazione che quelle sono "cose che si capisce come sono fatte".

Maestro - *che vuol dire forma?*
2 - *una cosa che ha una forma. esempio, toh, una forma di formaggio*
- *tutti gli oggetti hanno una forma. Questo ha una forma* (disegna un cerchio)
4 - *per esempio le formine che si fanno sulla spiaggia: insomma sono dei piccoli recipienti di plastica dove ci si mette la sabbia, poi si volta e viene la forma.*
6 - *forma è un nome che usiamo per indicare un oggetto e dire che ha una forma strana: guarda che forma strana ha quell'oggetto*
8 - *tutti hanno una forma, meno la luce. La forma e la sagoma sono la stessa cosa*
11 - *una forma è la spiegazione delle cose, cioè l'aspetto.*
15 - *forma significa: una cosa che assume un certo aspetto.*
17 - *una forma sarebbe per esempio una impronta lasciata da un uomo sulla sabbia, quella lì è la forma del suo piede. Oppure è una cosa che sta iniziando a diventare un essere: da così si forma e diventa così* (disegna tre contorni di grandezza crescente). *Oppure quando una cosa è fatta in un modo, per esempio l'ameba ha una forma fatta in un certo modo* (disegna una forma di ameba alla lavagna).



Roma, 26/10/1987. | IPPOLITO ELEANOR

Domande

1

Cosa vuol dire FORMA?

2

Cosa vuol dire SPAZIO?

Risposte

1

- Forma significa: una forma di formaggio, di salame, di mortadella ecc. ecc.
- Forma significa anche; come per esempio il quadrato, il quadrato ~~a una forma~~ (è una forma geometrica) (cioè, una cosa che si capisce come è fatta).
- Forma significa: una forma di vita, (cioè) un bambino, una pianta o

Fig. 33 - **34** - Che cosa significa Forma, che cosa significa Spazio

un animale).

2

- Spazio significa: una stanza che è molto larga, quindi a molto spazio.

- Spazio significa anche: quando esci dalla terra, vedi un celo scuro, (come se fosse notte) e ci sono le stelle, quello è lo spazio.

- Spazio può essere anche: quello del computer, (cioè, quando tu batti i tasti del computer, singi un tasto lungo per fare lo spazio tra una parola e l'altra.

- Spazio significa: quando tu scrivi sul quaderno o foglio ecc. ecc. devi lasciare ~~tt~~ lo spazio tra una parola e l'altra.

FINE

1) COSA VUOL DIRE = FORMA?
2) " " " " SPAZIO? CHRIS

1) forma significa tutto perché tutto ha una forma

2) Spazio é una cosa immensa dove vanno le astronavi.

A una cosa all'altra c'è uno spazio grande e uno ~~pic~~ piccolo e uno piccolissimo

11. Verso le forme geometriche

Si proiettano ancora sul muro, con la lavagna luminosa, ritagli di carta opaca con forme geometriche regolari o irregolari. Affiorano i ricordi di una geometria studiata a scuola in precedenza e i ragazzi riconoscono facilmente rettangoli e quadrati. Sara risponde alla provocazione del maestro che aveva definito il rettangolo come un "quadrato allungato":

Fig. 35 - Composizione di triangoli proiettate con la lavagna luminosa

Iniziano le attività di raggruppamento, che porteranno a sviluppare le strategie di confronto necessarie per ogni classificazione. Si distribuiscono schede di lavoro con figure di vario tipo da raggruppare per forma.

Il compito presenta alcune difficoltà, visto che alcune forme sono state ambiguamente disposte nello spazio in posizioni non "convenzionali". È interessante ascoltare come i ragazzi, una volta riuniti in cerchio, descrivono le singole forme ed esplicitano i criteri che hanno guidato i raggruppamenti. Nel confronto si trovano le proprietà che sono comuni ad alcune delle figure e si cerca di scoprire quelle meno evidenti.

2 - *voglio dire una cosa contro il maestro, perché secondo me quadrato vuol dire con i quattro lati uguali e se dici quadrato allungato allora non è più un quadrato perché allora un lato si allunga e allora non è più un quadrato e i lati non sono più uguali.*
- *Rettangolo vuoi dire retto angolo.*
Maestro - *dimmi, se io lo chiamo quadrilatero è sbagliato o no?*
2 - *no, perché ha quattro lati.*
5 - *allora può essere un parallelogrammo.*
17- *è come animale, pesce e ... crostaceo.*
Maestro - *si può chiamare quadrilatero quello che ha quattro lati, e allora se ha tre lati come lo chiami: trilatero?*
- *no triangolo*
- *ma non è lo stesso*
Maestro (mostra un rettangolo) - *questo è un quadrilatero?*
- *questo si perché ha quattro lati*
2 - *quadrilatero può essere un nome collettivo*
Maestro - *che significa collettivo, che al singolare non c'è? potrebbe essere un nome comune...*

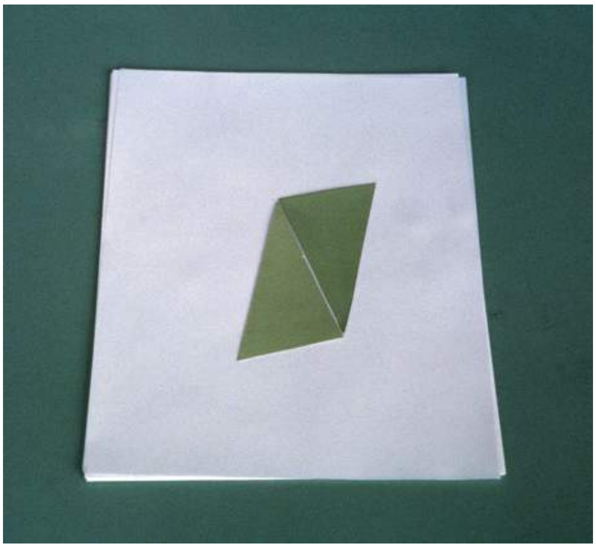


Fig 36 - Composizione di triangoli di cartoncino che formano un quadrilatero

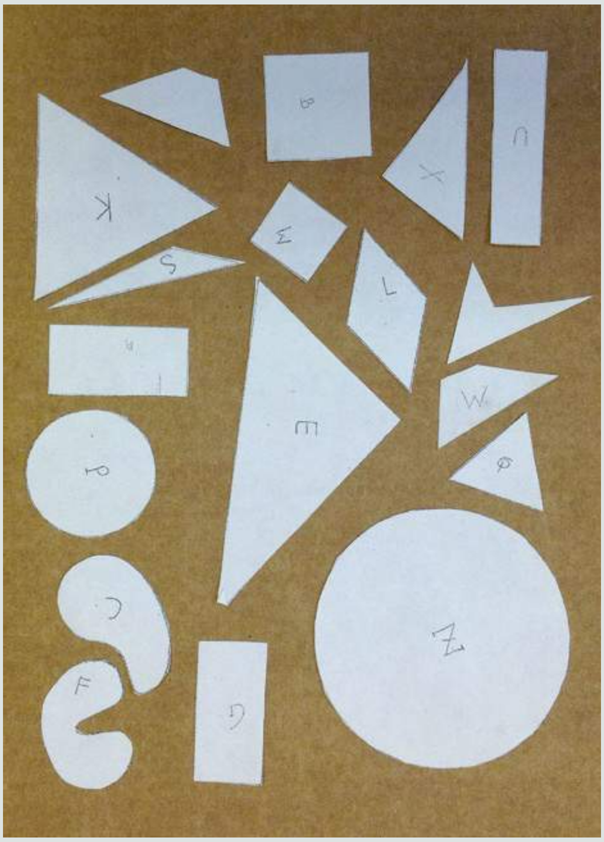
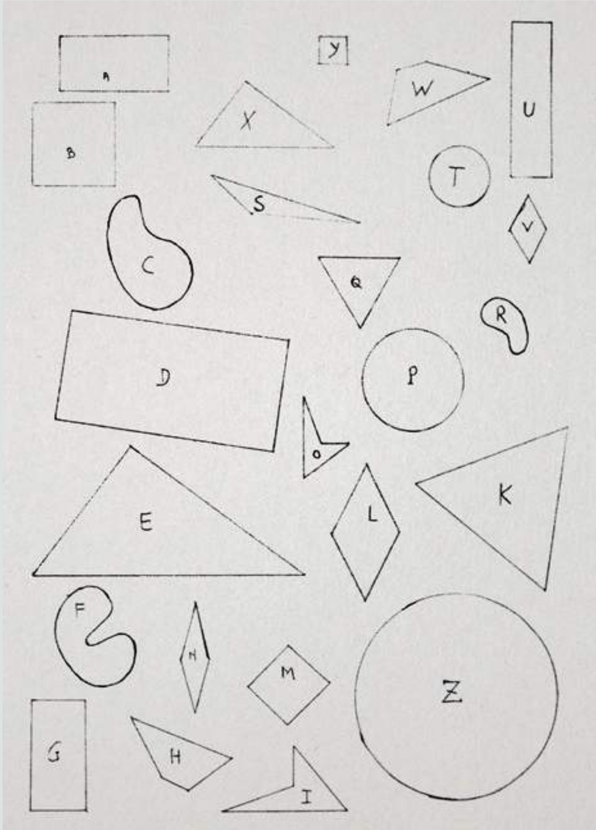
 

Fig. 37 - **38** - Raggruppare le forme simili

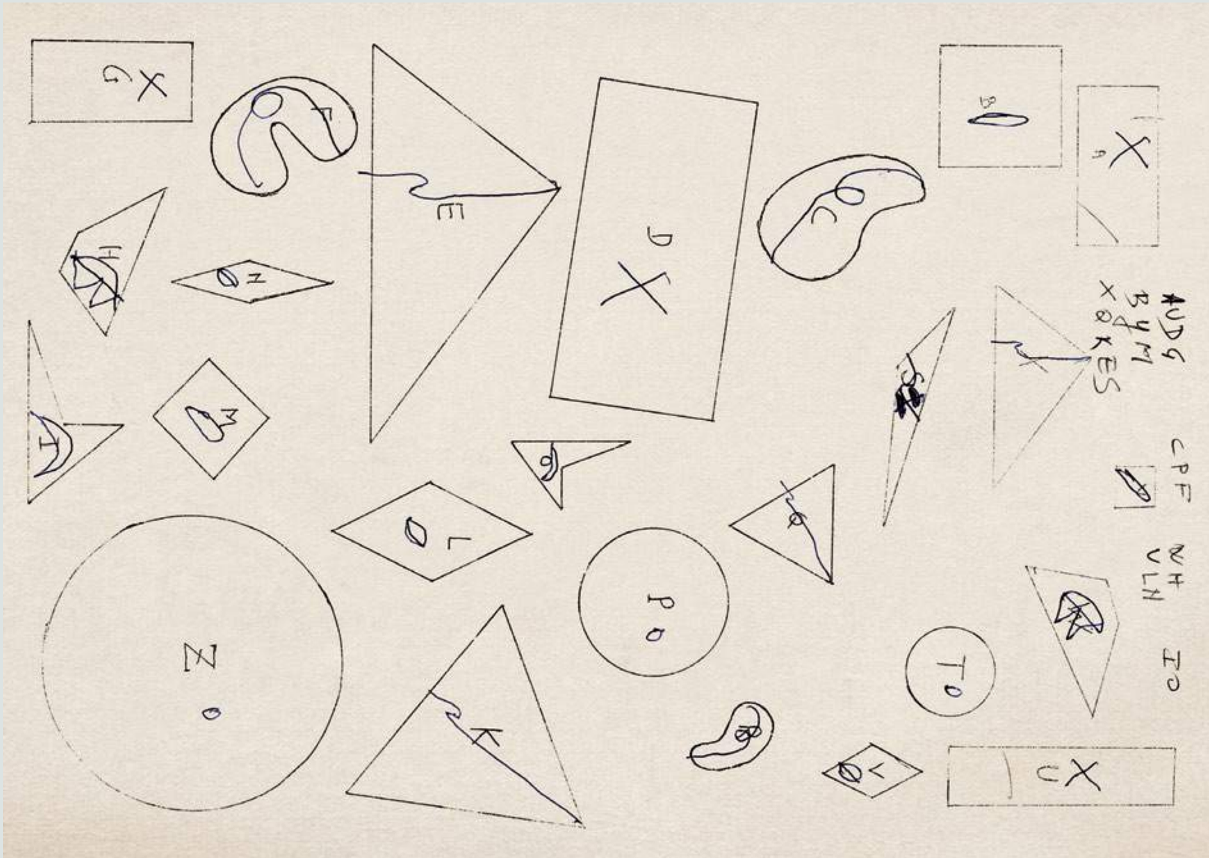


Fig. 39 - Esempio di raggruppamento con simbolizzazione

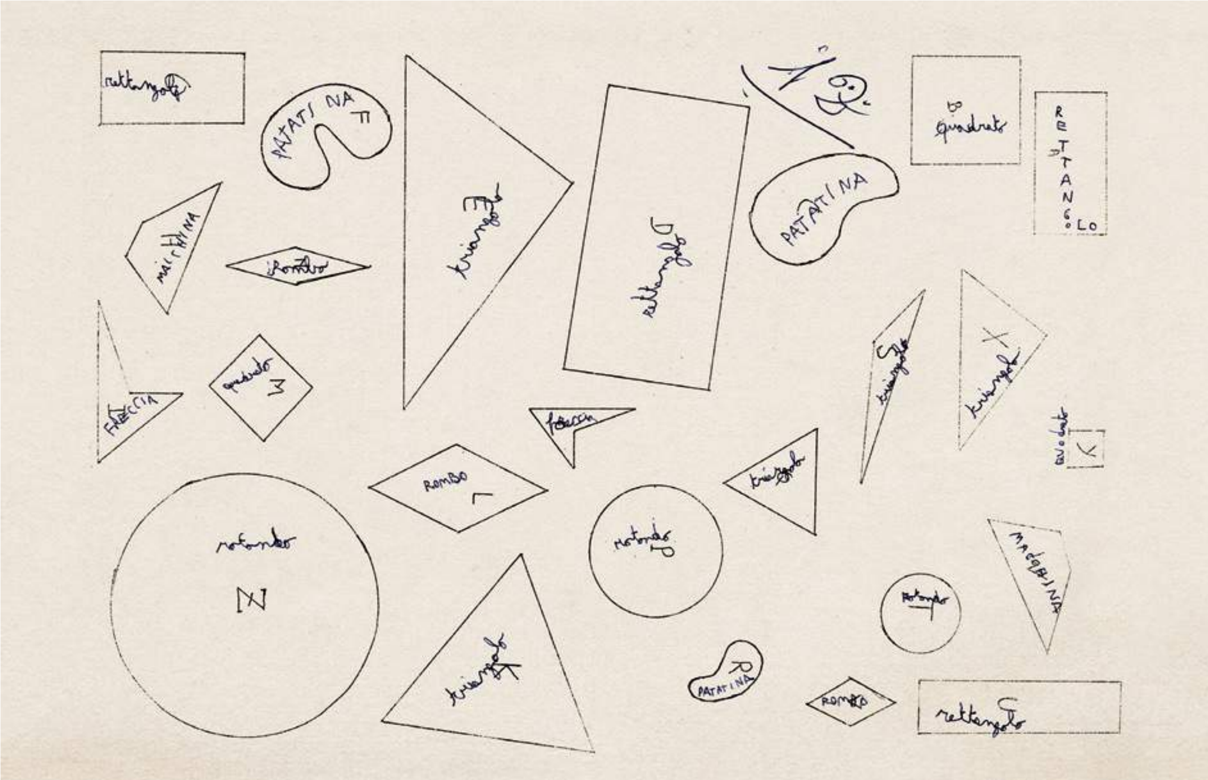


Fig. 40 - Esempio di raggruppamento con nomi uguali per figure uguali

Cerchiamo di capire, dalle parole dei ragazzi, se in alcune delle figure disegnate riconoscono modelli geometrici che hanno già in testa, se a queste sono capaci di dare nomi corretti e se invece sono costretti ad inventare nomi strani per raggruppare le figure non "geometriche". Ma proprio l'accortezza dello sguardo a cui il maestro li ha educati stimola i ragazzi a cogliere ogni particolare, a non dare la prima risposta ovvia che tutti si sarebbero aspettati, cercando astuzie varie per "non lasciarsi imbrogliare". Comunque non tutti riescono a mettere nel gruppo dei rettangoli anche quelli disegnati per traverso. Del resto, i libri di geometria indicano sempre una base parellela al bordo del foglio e un'altezza ad essa perpendicolare sia per i parallelogrammi sia per i triangoli. È difficile quindi per i ragazzi immaginare delle basi oblique. Il maestro cerca di focalizzare l'attenzione sulle proprietà dei quadrilateri, rimandando ad altri momenti l'analisi di altre figure.

Maestro - *abbiamo diviso fino ad ora le figure in due gruppi: in uno ci sono i quadrilateri, nell'altro ci sono altre figure. Fermiamoci al gruppo dei quadrilateri, anche se è divertente vedere cosa possiamo scoprire de "i rotondi".*
Dopo parleremo dei rotondi.

Mette un righello sul piano della lavagna luminosa in modo da far vedere bene l'ombra proiettata sul muro. Si prosegue mettendo sul piano altre figure in cartoncino e i ragazzi dicono se sono o non sono quadrilateri. Tra i quadrilateri si accettano anche quelli irregolari che i bambini chiamano "frecce". Si apre la discussione:

Maestro - *quanti lati vedete in queste figure? Allora tutti questi li possiamo chiamare quadrilateri o quattro lati? Cominciamo a dare un nome anche a queste altre figure, per esempio Diego ha detto che ce ne è uno che si potrebbe chiamare freccia: è questo?*
Paolo - (a Diego) *perché quelle figure le chiami tutte con lo stesso nome di freccia?*
12 - *perché hanno la stessa forma*
- *e diversa grandezza*
2 - *gli ho dato lo stesso nome perché si assomigliano*

Maestro - *in che cosa si assomigliano? perché sono due pezzi di carta?*
11 - *si assomigliano nella forma*
8 - *non si assomigliano, sono uguali*
2 - *non sono uguali, uno è più piccolo l'altro è più grande. Uguali vuoi dire che sono della stessa grandezza e della stessa forma*
- *dovrebbero essere proprio precisi! si possono mettere l'uno sull'altro*
Maestro - *possiamo mettere insieme alle frecce anche queste altre che hanno quattro lati?*
12 - *io li ho chiamati macchine perché hanno la forma di macchine-barcone...*
17 - *ci sono due forme strane che non si sa il nome* (trapezi)
Maestro - *ci può essere una figura con quattro angoli e cinque lati? il quadrilatero in fondo* (freccia) *quanti lati e quanti angoli ha?*
- *quattro* (si indicano nella freccia gli angoli acuti interni e un solo angolo esterno)
17 - *si possono guardare solo gli angoli disegnati dentro o anche quelli di fuori?*
Maestro - *quelli disegnati dentro... ma dimmi quali vedi di fuori*
17 - *allora sono moltissimi. Per esempio anche in un righello ci sono otto angoli e quindi anche in una riga*
11 - *ce ne stanno otto, ci sono altri angoli, anche quelli che stanno fuori.*
8 - *è vero!*

Fig. 41- Proiezione di quadrilateri "freccia" e aquilone

Ovviamente, parlando di angoli non poteva mancare qualcuno che... non ha ancora capito. Infatti, sull'angolo interno della figura a freccia disegnata alla lavagna un bambino si accinge coscienziosamente a fare una quantità di righe parallele o quasi che indicano, secondo lui, una quantità di angoli diversi....

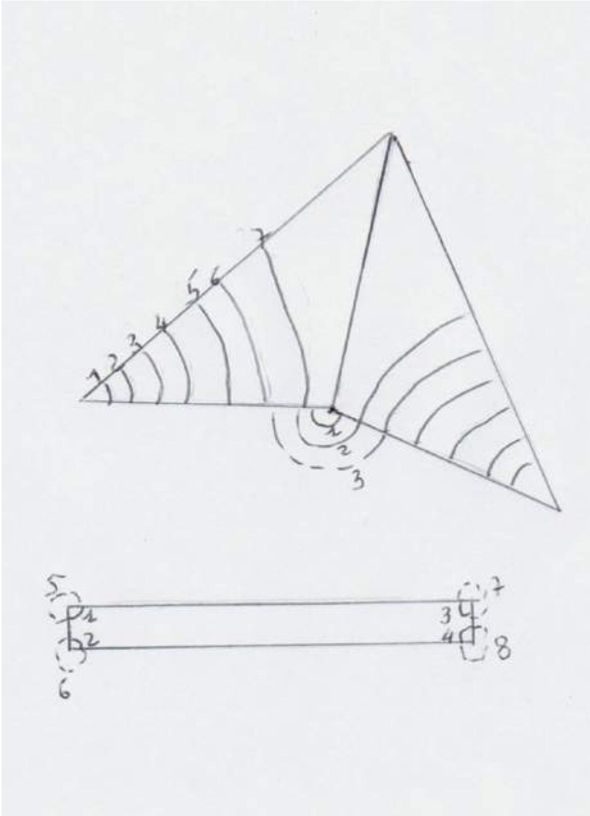


Fig. 42 - Angoli, angoli, angoli

I compagni protestano ma il maestro non perde l'occasione di approfondire:

12 - *ce ne stanno moltissimi, questi sono tutti angoli*
 - *e che è un angolo quello? Sembrano squame?*
Maestro - *Diego ha detto che ci sono questi angoli qui dentro, allora quanti ce ne potrei fare?*
12 - *tantissimi*
Maestro - *ma è sicuro che sono angoli sempre diversi?*
12 - *sì, perché all'inizio è piccolo, poi l'altro è così, poi è così; si misura sempre questo pezzo* (ogni squama indica un angolo diverso)
Maestro - *ma perché io ho segnato l'angolo con una linea curva e tutti voi l'avete ripetuto con una linea curva? perché non l'avete fatta dritta?*
- *potresti anche farla dritta*
Maestro - *perché poi gli angoli si segnano tondi, non l'ho capito*
- *per me gli angoli sono le punte*
8 - *gli angoli sono buchi*
11 - *ci sono gli angoli interni e esterni*
18 - *secondo me un angolo è quando c'è una linea che si incrocia con un'altra linea. Fino a che la linea è dritta non ci sono angoli, per fare un angolo deve incrociare un'altra linea.*

Ancora una provocazione da parte del maestro che si diverte a proiettare sul muro forme diverse

Maestro - *una linea, uno spago teso, tirato, ce l'ha l'angolo?*
10 - *ci sono due angoli sullo spago* (prova a disegnarli alla lavagna, uno a ciascuna estremità dello spago), *in un elastico* (un pezzo di fettuccia elastica rettangolare) *se qualcuno me lo regge ce ne sono due per parte, se lo disegno alla lavagna sono quattro. In un elastico ci sono quattro angoli*
2 - *una linea ha sempre uno spessore, ha sempre un angolo*
10 - *ha lo spessore, lo spessore c'è sempre*
- *questa no, è un'ombra*
10 - *meno che l'ombra* (controlla sulla lavagna luminosa), *è un riflesso*
Maestro - (mette la mano in diverse posizioni, per mettere in evidenza la tridimensionalità e le diverse forme dell'ombra) *prendi lo spessore della mia mano*
- *ma quello non è lo spessore, è la larghezza*
Maestro - *sul muro c'è lo spessore? se la metto di profilo, così c'è lo spessore?*
- *l'immagine ha lo spessore!*
Maestro - *l'immagine di questa mano che è proiettata sul muro, ha uno spessore?*
- *dici lo spessore della mano o lo spessore dell'ombra?*
12 - *c'è lo spessore, anche l'ombra ha lo spessore, dallo specchio al muro*
Maestro - *la proiezione dell'immagine che parte dalla lavagna luminosa per arrivare al muro e formare l'ombra è spessore, secondo Diego, perché questa immagine cammina così fino al muro e allora questo percorso dell'immagine, tanto da arrivare fino al muro crea uno spessore. Diego ha detto anche che l'immagine è la proiezione della forma dell'oggetto che va sul muro; adesso proviamo a vedere l'immagine del bastone. Si vede?* (allontana e avvicina il bastone muovendolo tra la sorgente luminosa e il muro)
- *si allarga sempre di più*
- *accipicchia quanto è grande!*

Maestro - (mette il bastone appoggiato sul piano della lavagna luminosa, fino a toccare i margini della superficie illuminata) *l'ombra di questa linea non ha spessore, ma le ombre possono formare degli angoli? dove? l'ombra del bastone quanti angoli sta facendo?*
- un sacco!
- dove si incrocia con i bordi.

I lavori sui raggruppamenti proseguono con una varietà di altre schede su cui sono disegnate figure curve e poligoni di varie forme e dimensioni - anche non regolari.
Le richieste sono diverse: bisogna trovare le figure senza angoli, quelle che hanno la stessa forma, quelle che si possono sovrapporre, quelle "regolari", quelle che hanno uno o più angoli retti, quelle che hanno angoli acuti... che hanno tre, quattro o più lati, altre volte la richiesta è di fare raggruppamenti liberi. Nel corso della discussione si chiedono spiegazioni: perché hai messo insieme certi quadrilateri? Perchè hai messo insieme quelle figure? Quali sono le caratteristiche comuni ai triangoli del tuo gruppo?

Ecco, per esempio, una scheda sui quadrilateri:

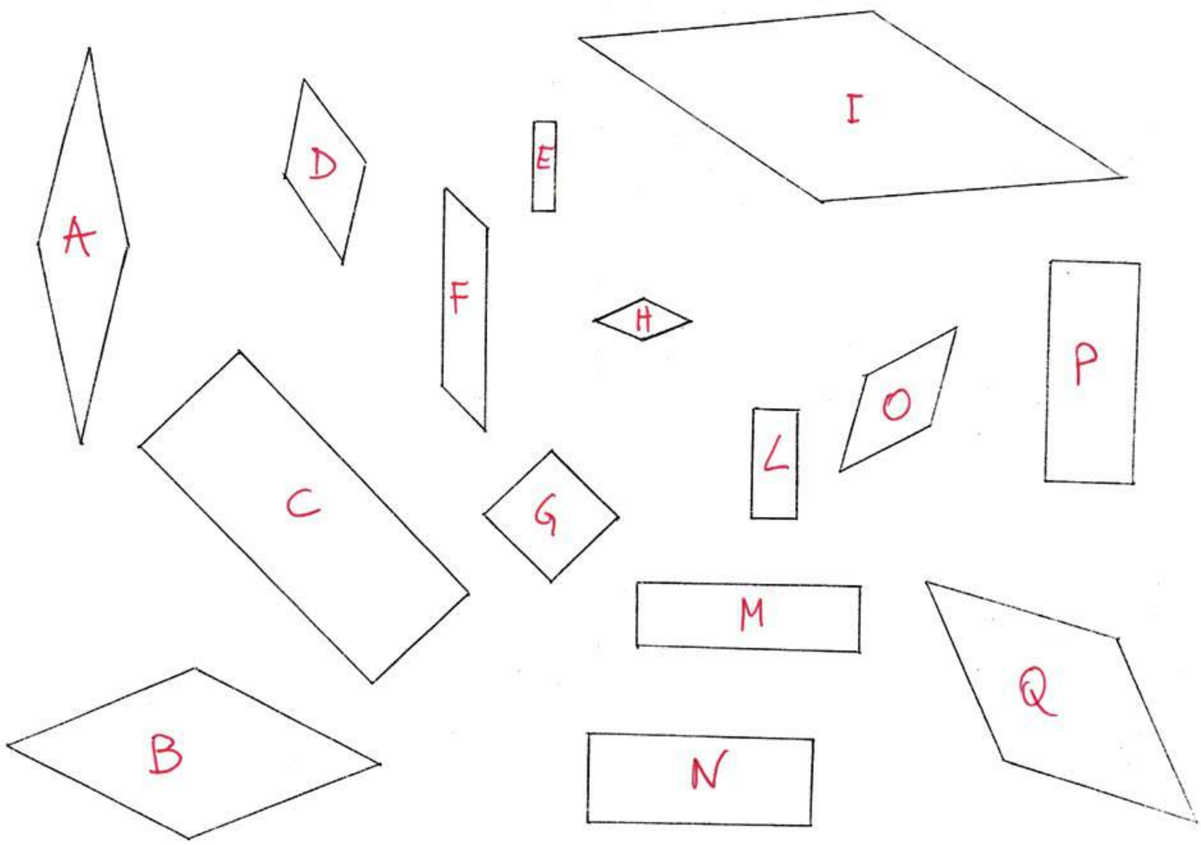


Fig. 43 - Quali di queste figure hanno la stessa forma?

Lo scopo è quello di aiutare i ragazzi a fare attenzione ai particolari, a riconoscere caratteristiche, a scovare somiglianze e differenze non sempre evidenti. Le attività di raggruppamento e poi quelle di classificazione costruiscono categorie mentali che portano a riconoscere rapidamente le proprietà delle figure geometriche, in un certo senso astraendole dalle figure disegnate che i ragazzi hanno sotto gli occhi.

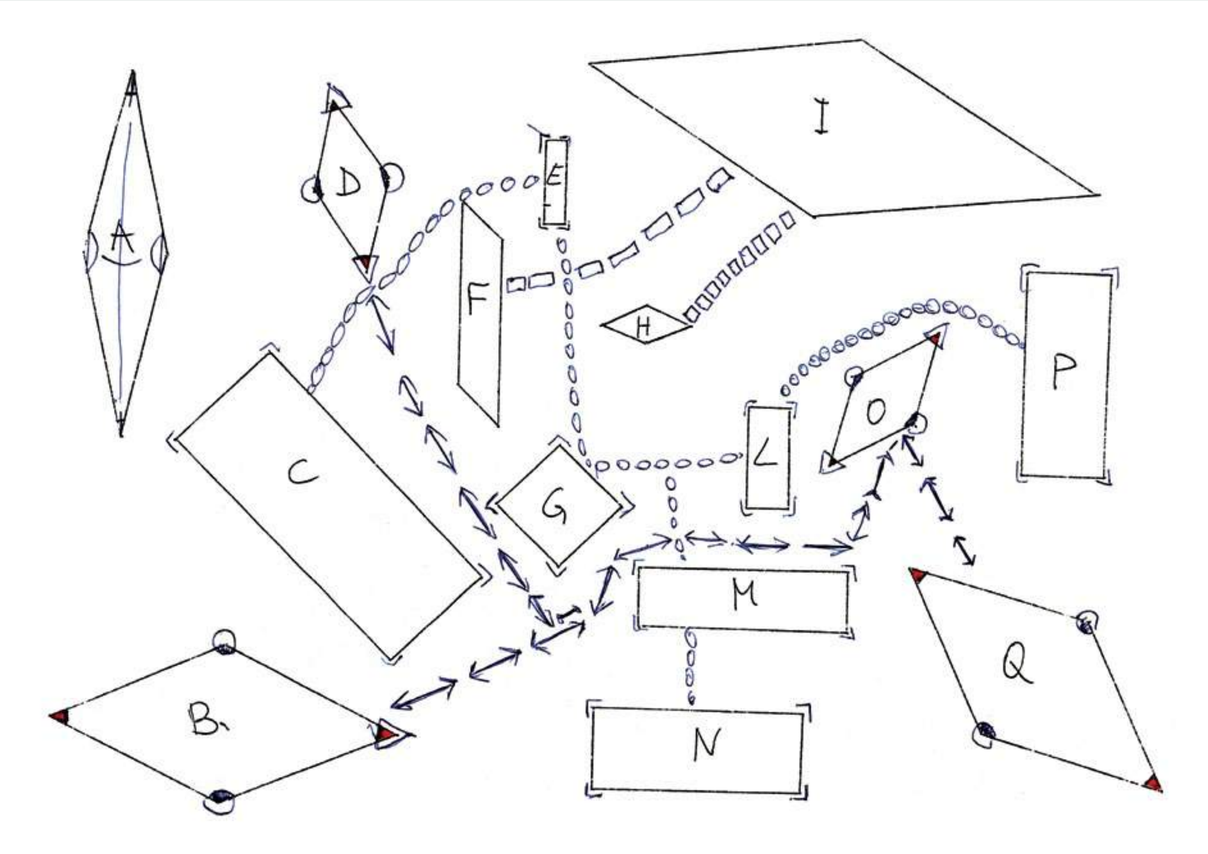


Fig. 44 - **45** - Esempi di lavori svolti

12. Famiglie di triangoli

Oggi si comincia il lavoro sui triangoli: come prima attività si distribuisce un foglio su cui sono disegnati vari tipi di triangoli con la domanda: Quali di queste figure hanno la stessa forma?
Chi sa se qualcuno avrà la forza di rispondere: tutti.
In realtà questo aspetto verrà sviluppato nella discussione che segue il lavoro, e noi potremo renderci conto delle differenti capacità di astrazione e categorizzazione dei ragazzi, sia di chi include nella stessa classe dei triangoli quelli con forme differenti sia di quelli che, pur senza trovare un nome, fanno "sottoclassi" dei triangoli simili dove le uguaglianze e differenze tra le figure sono colte ad occhio.
Ancora, si chiede di individuare la o le figure con forma "diversa".

Ognuno risponde a suo modo ma è interessante notare le differenze nelle simbolizzazioni che caratterizzano i vari raggruppamenti.

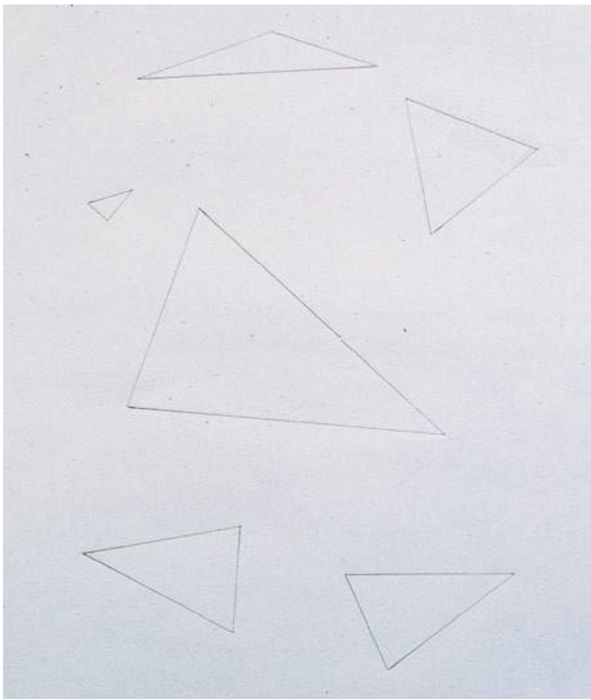


Fig. 46 - Quali di queste figure hanno la stessa forma?

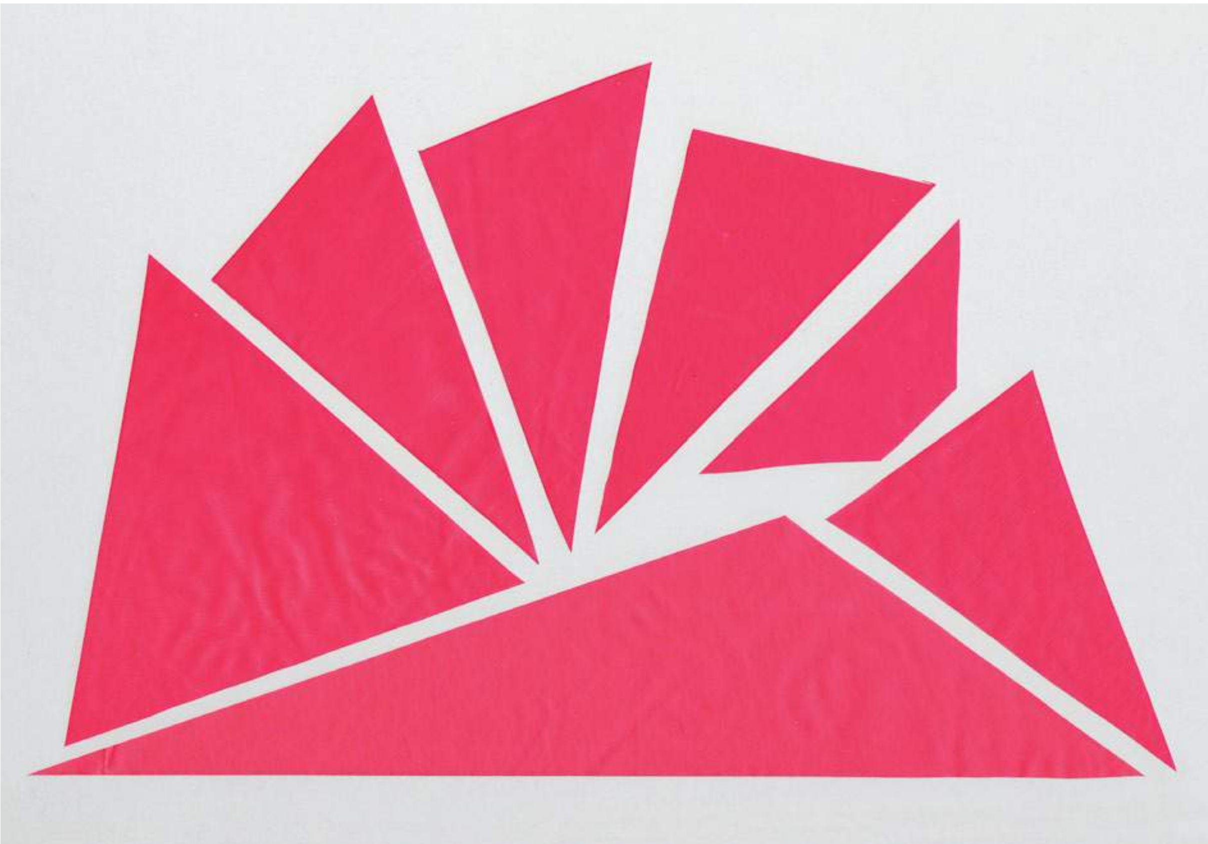
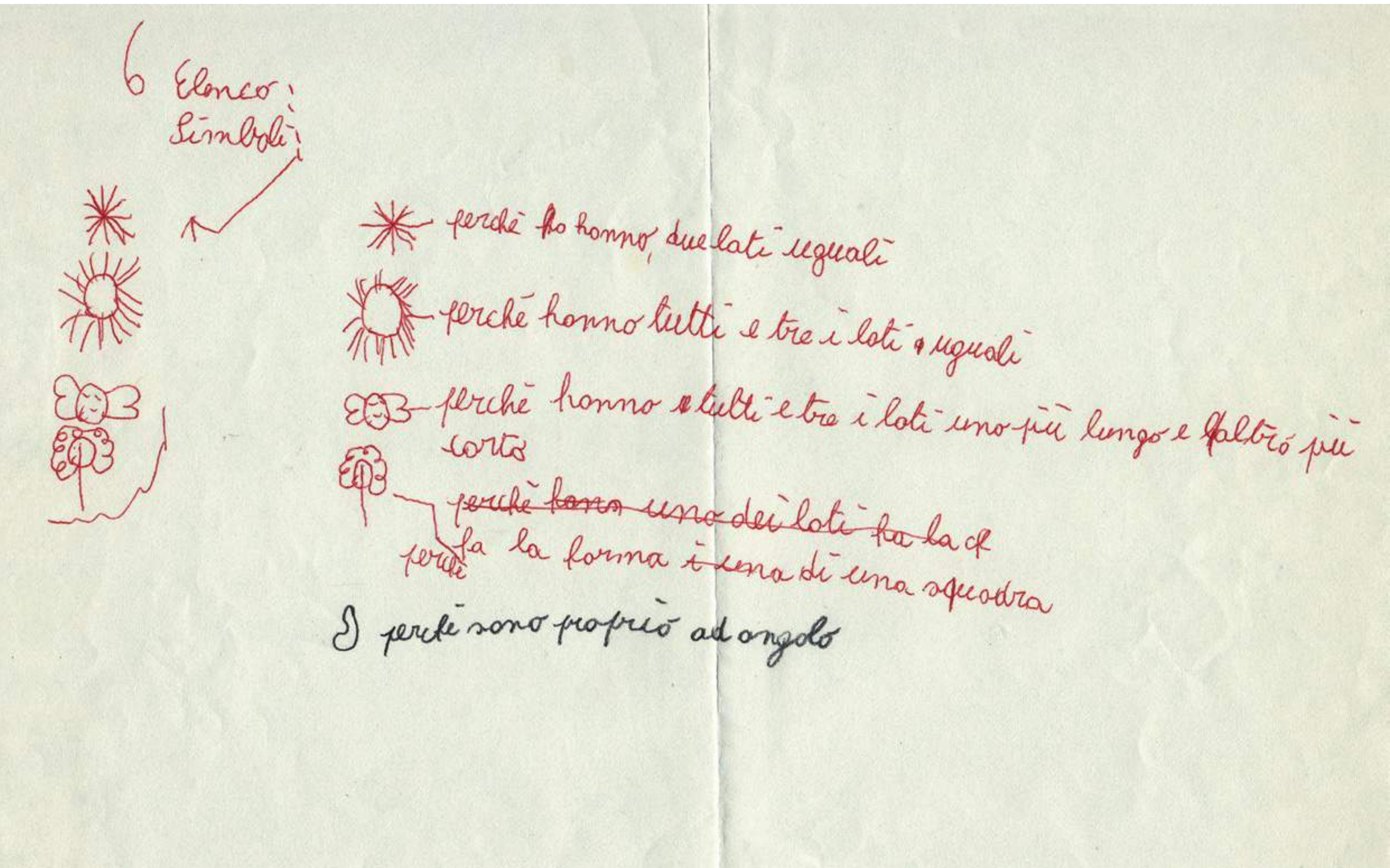
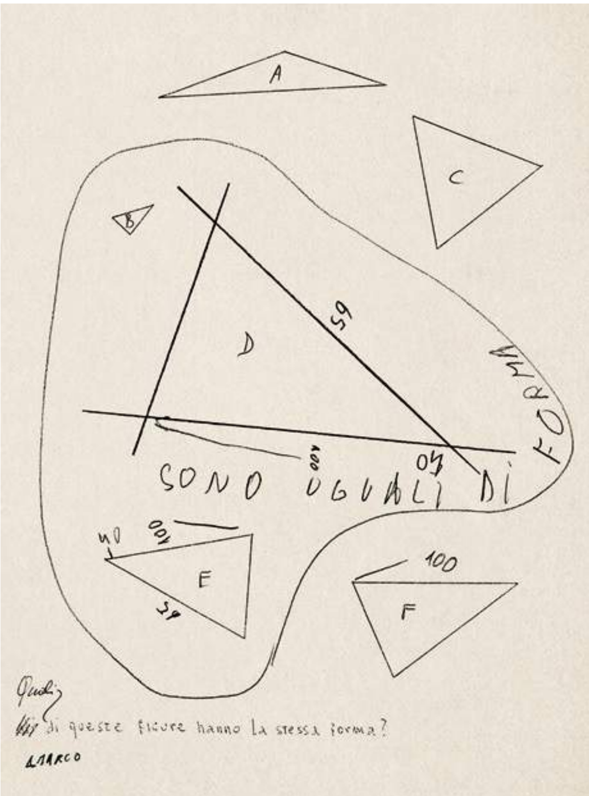


Fig. 47 - Indica le figure uguali e quelle diverse per forma





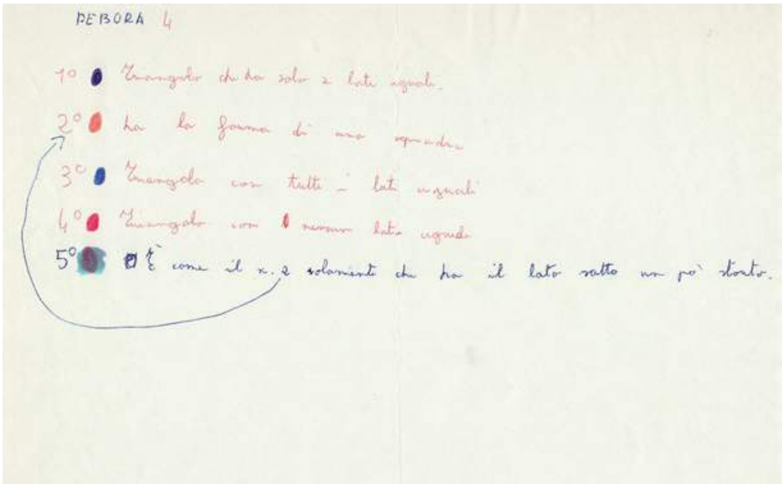


Fig. 48 - **49** - **50** - Raggruppamenti di triangoli, simboli e spiegazioni

Per proseguire, sono stati accuratamente disegnati, fotocopiati a diversi ingrandimenti e ritagliati una gran quantità di triangoli, di cinque tipi e di cinque scale diverse.
Ci sono quindi equilateri, isosceli, vari scaleni; rettangoli, acutangoli, ottusangoli… di varie dimensioni.

Fig. 51 - Palcoscenico di triangoli

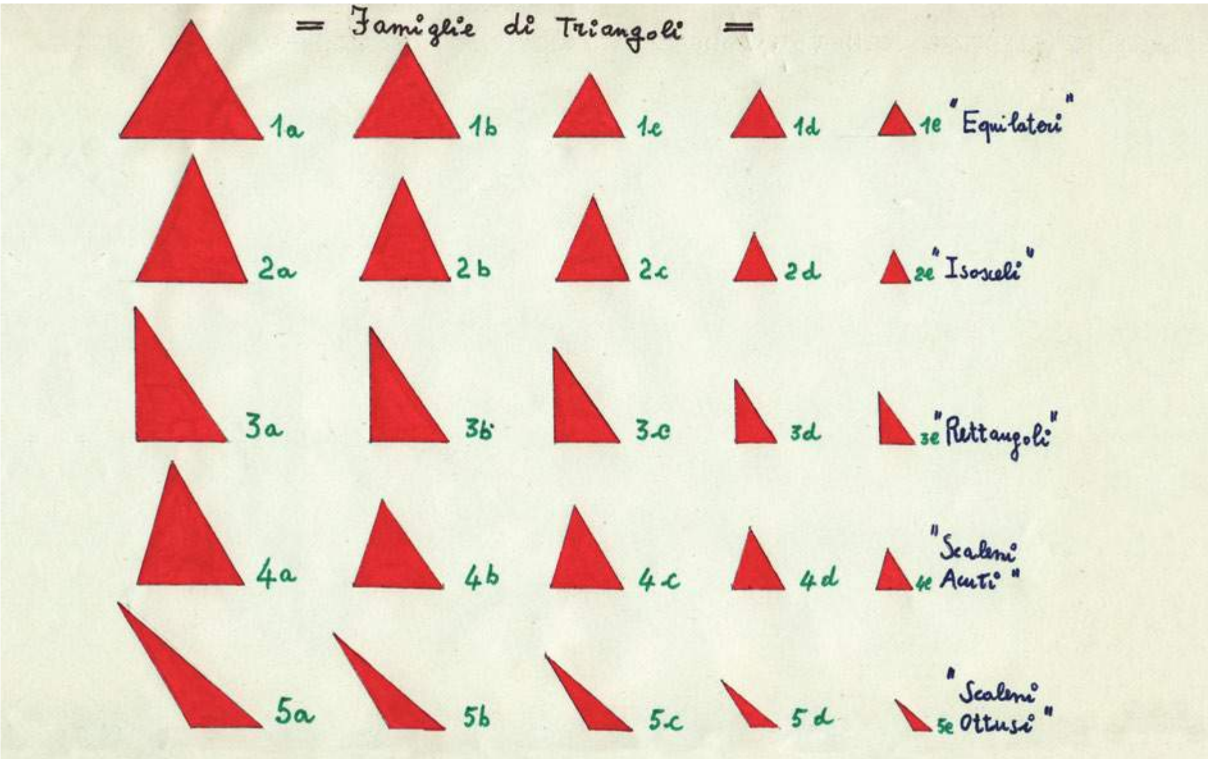


Fig. 52 - Famiglie di triangoli con cui lavoreremo

Ancora vogliamo capire se nella varietà delle figure di cartoncino i ragazzi riconoscono tutti una idea (di triangolo) che hanno già in mente e se riescono a trovare dei criteri per distinguere e categorizzare i vari tipi di triangoli.

10 - *sono tutti triangoli, tranne questi* (scaleni)
11 - *d'accordo con 10: solo alcuni sono triangoli* (non sono triangoli gli scaleni)
13 - *devo dire una cosa contro quelli che dicono triangoli: perché hanno tre angoli esposti fuori, e tre dentro. Per cui devono essere sei angoli*
10 - *però questi hanno anche tre lati*
17- *e allora potrebbero essere anche mille angoli*
Maestro - *che cosa avete in mente quando dite "triangolo"?*
3 - *triangolo vuoi dire con tre angoli, perciò sono tutti quanti uguali, uno, due e tre, sono tutti triangoli*
10 - *vuoi dire tre lati, hanno tutti tre lati*
- *no, vuoi dire tre angoli*
13 - *l'altra volta Mayer aveva segnato anche gli angoli fuori*
Maria - *consideriamo i tre angoli dentro la figura*
13 - *sono tutti triangoli, perché tutti hanno tre lati, o tre angoli, anche se non sono della stessa forma*
4 - *per me sono tutti triangoli, anche se con i lati un po' spostati*
12 - *sono tutti triangoli, hanno tre angoli, ma non hanno la stessa forma*
Paolo - *scegline due che hanno la stessa forma e due che hanno forma diversa.*

Non mancano, naturalmente, le precisazioni: è chiaro che sono tutti triangoli (anche gli scaleni, dopo qualche esitazione) e quindi hanno tutti forma triangolare... La parola triangolo serve a dare un nome ad una proprietà precisa dei cartoncini ritagliati che hanno davanti, ed è proprio questa proprietà (avere tre lati e tri angoli, come dice Andrea N.) che definisce la forma geometrica del triangolo. Diventano quindi interessanti i criteri che vengono via via indicati per suddividere i triangoli in "famiglie" che abbiano la stessa forma, indipendentemente dalla grandezza.
Sui gruppi-famiglie formati da alcuni bambini si apre subito la discussione collettiva. C'è chi propone di togliere alcuni triangoli dal raggruppamento, chi di aggiungerne altri, chi vorrebbe spostare elementi da una famiglia ad un altra. Sara critica la famiglia fatta da Raffaella prendendo spontaneamente come campione di angolo retto gli angoli di una mattonella del pavimento.

2 - *vorrei dire una cosa contro Raffaella, perché per me quelli non vanno insieme per niente; vedi che questo, se tu lo metti qui* (al bordo della mattonella quadrata sul pavimento) *il lato va dritto, ma se metti quest'altro il lato va più su! anche questo, dovrebbe andare dritto così, come quest'altro. Io metterei insieme questi* (divide i triangoli rettangoli dagli scaleni).
18 - *la mia famiglia resta così, perché io ho messo qua soltanto quelli che sono storti, anche se sono più grandi o più piccoli, secondo me vanno tutti gli storti.*

Anche Massimo ha fatto una sua famiglia:

10 - *cambio idea: credo che questa è tutta quanta una famiglia di triangoli, però si può dividere in due parti; questi di questo genere è una famiglia* (scaleni) *perché sono storti e questi un'altra* (isosceli) *perché sono tutti uguali, non di grandezza ma di forma. Poi questa è un'altra famiglia, perché ha una linea dritta e un angolo dritto, ha un angolo, insomma*
Maestro - *e gli altri non hanno pure un angolo?*
10 - *perché questo ha una linea dritta e una storta, una diagonale, questo ha i lati... come possiamo dire, di questi ce ne vogliono due per fare un quadrilatero* (accosta due triangoli rettangoli della stessa grandezza).

Dopo un bel pò di tentativi e contestazioni si cercano di formalizzare le regole di "appartenenza a una famiglia", per giungere gradualmente a definire i criteri per la similitudine. Inizialmente i ragazzi valorizzeranno gli indizi percettivi, riconoscendo anche piccole differenze nella forma, poi si accorgeranno della uguaglianza degli angoli. Il rapporto tra le lunghezze dei lati sarà forse l'ostacolo più duro da superare, forse perchè la fiducia in una "matematica additiva" non lascia intravedere l'esigenza di una proporzionalità.

Maria - *se dovessi dire a un triangolo che vuole entrare nella tua famiglia come deve essere per essere accettato, se tu dovessi dire una parola d'ordine per farlo entrare, cosa dovresti dire?* (porge un triangolo equilatero)
6 - (ha una famiglia di isosceli) *questo ha un lato un po' più lungo di questa striscia, mentre invece questi due, i miei, sono pari!*
Maria - *allora tu sei quella della famiglia che per lati ha due linee pari. Nella tua famiglia possono entrare solo quelli che hanno due lati uguali. Vediamo se qualcun altro può o non può entrare nella tua famiglia*
17 - *io prendo uno di quei triangoli lì, e provo ad entrare in casa di Emanuela: Emanuela ha detto che possano entrare quelli con due lati pari, io pure ho due lati pari* (equilatero), *quindi posso entrare.*

Ovviamente, avere "solo" due lati pari non basta, e Luca se ne è accorto benissimo. Emanuela deve dunque aggiungere altre caratteristiche per definire meglio chi può entrare a far parte della sua famiglia e chi non può entrarvi. Come puntualizza Donata, gli occhi non sempre bastano: bisogna sovrapporre i triangoli, ruotarli, e trovare anche attraverso i gesti, dei plausibili criteri di appartenenza alle varie famiglie.

Maria - *Luca dice che potrebbe entrare nella famiglia di Emanuela perché due lati uguali ce li ha. Se Emanuela non volesse farlo entrare, che altra condizione potrebbe mettere?*
14 - *io vorrei dire la risposta per Emanuela: che la famiglia di Luca non può entrare, perché se tu giri uno di quel triangoli della famiglia di Luca, ha sempre la stessa posizione, se invece giri quello di Emanuela, cambia la posizione. Quello ha tutti e tre i lati uguali, per cui se tu lo metti in un'altra posizione rimane sempre così, mentre gli altri, quelli di Emanuela, hanno un lato un po' storto, uno che pende diciamo. Questo di Luca, se lo mettiamo così e lo spostiamo con un angolo in su, è sempre uguale, anche se metto in su un altro angolo. Questo di Emanuela lo mettiamo con un angolo in su, e poi lo mettiamo con un altro angolo in su, non ha la stessa posizione, perciò per me questi non possono entrare*
Paolo - *perciò tu diresti a Luca: girati, se sei diverso per i lati puoi entrare se sei sempre uguale non puoi entrare*
14 - *no, l'incontrario: se sei uguale per tre lati non puoi entrare, se sei uguale per due lati puoi entrare.*

Donata ha spiegato bene il suo pensiero, ed anche se non se ne accorge ripete a modo suo l'affermazione di Paolo. Si capisce che per individuare una famiglia bisogna guardare sia i lati sia gli angoli, ed una evidente difficoltà è data dal fatto che nei triangoli di una stessa famiglia gli angoli corrispondenti sono uguali mentre la lunghezza dei lati cambia con le dimensioni (cioè con gli ingrandimenti realizzati con la fotocopiatrice). Bisogna quindi cercare dei criteri per guardare sia i lati sia gli angoli, magari aiutandosi con le linee dritte delle mattonelle sul pavimento, come cerca di fare Raffaella, o con i lati del grande foglio di carta su cui sono ammucchiati i triangoli che i ragazzi stanno cercando di dividere in famiglie.

8 - contro 5 e 10 - *questi due che prima erano messi insieme a questi, è sbagliato, perché questo angolo è un pò stortignaccolo* (toglie lo scaleno dagli equilateri) *poi, guarda, questi non possono stare insieme, perché si vede che questi due lati sono più lunghi di questi, mentre in questi altri i lati sono tutti uguali*
- *questi qui hanno tre lati che si assomigliano, e questi hanno la stessa forma* (scaleni)
Maria - *hai detto che questo triangolo ha due lati quasi uguali, questo ne ha tre quasi uguali, e i lati di questo come sono?*
8 - *mi sembrano tutti uguali* (ma guarda gli angoli e non i lati); *questi mi sembrano tutti uguali* (sono tre scaleni in scala)

18 - *per entrare nella mia famiglia deve avere un lato storto; sono d'accordo con Sara che questo non lo ha* (è un rettangolo); *bisogna averci questo lato storto*
Maria - *ma come si fa ad avere un lato storto? sono tagliati tutti con le forbici dritte*
18 - *no, non storto, è dritto, però è inclinato*
Paolo - *e che significa dritto*
Maria - *Anche se quello che vuoi farci capire si vede, dobbiamo sempre trovare le parole giuste per dirlo.*

Attività

Si distribuiscono a ciascun ragazzo mucchi di triangoli ritagliati, con la richiesta di:
- raggruppare i triangoli in famiglie
- indicare con uno stesso simbolo quelli della stessa famiglia
- riportare il simbolo e il tipo di triangolo corrispondente su un foglio a parte.

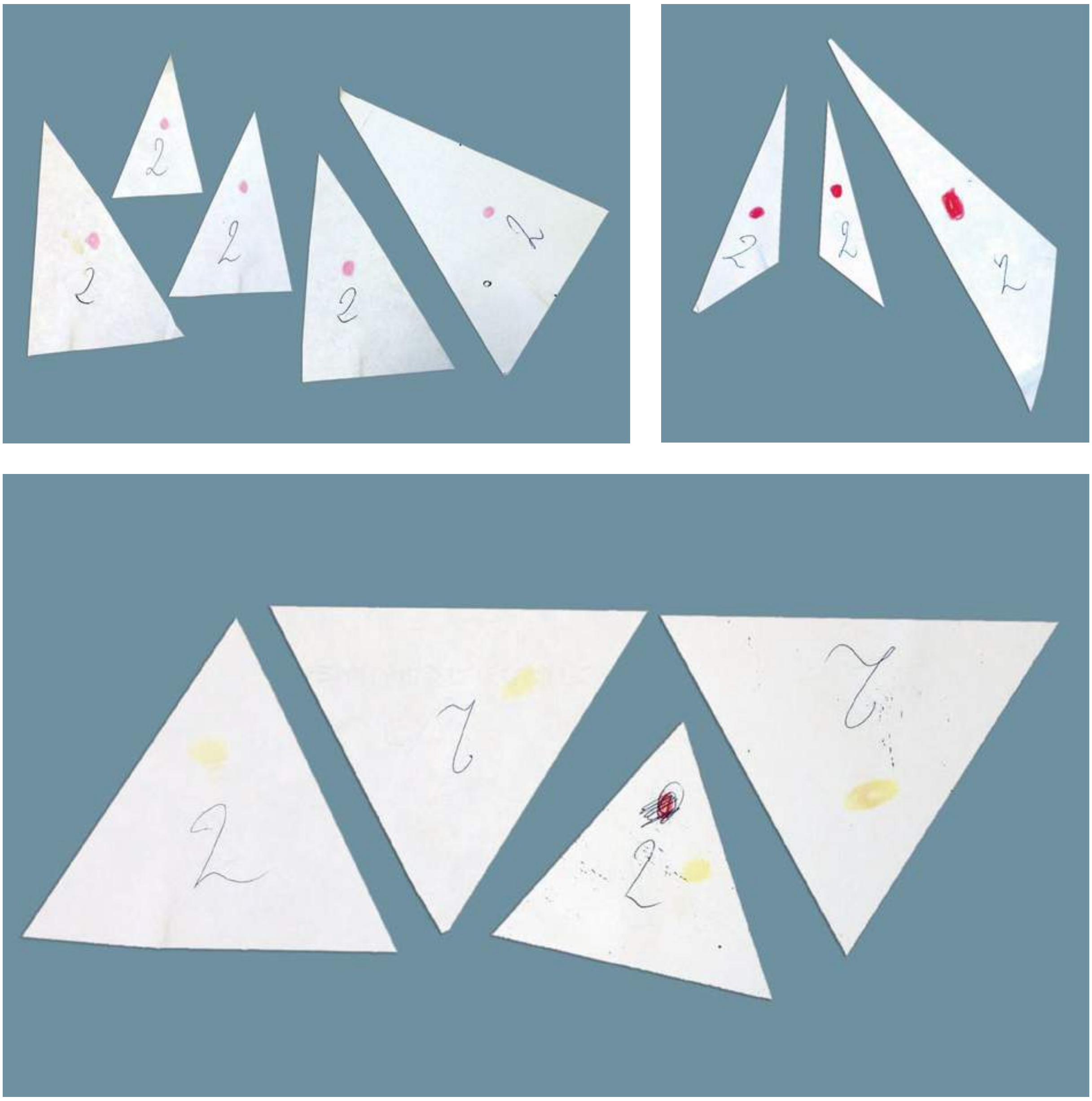


Fig. 53 - **54** - **55** - Esempi di famiglie

13. Famiglie di oggetti

Per ampliare e contemporaneamente definire meglio le idee di forma, una tra le tante proprietà in base a cui è possibile effettuare i raggruppamenti, sono stati ancora portati in classe oggetti di varia forma e di diversi materiali: tazze e tazzine, cucchiai e cucchiaini, bottiglie, scatolette, tappi, lastrine, ecc.
Questa volta, alcuni erano oggetti decisamente "in scala", uguali per forma e diversi per dimensioni, altri abbastanza simili per forma, altri dei veri "pezzi unici". Ci aspettavamo che maneggiandoli fosse più facile caratterizzare e distinguere forme uguali e dimensioni differenti, ed avviare così idee che sarebbero servite poi per definire la similitudine nei triangoli. Speravamo che la materialità concreta degli oggetti non fosse di ostacolo allo sviluppo della necessaria capacità di astrazione ma che, piuttosto, il guardare, toccare, girare, spostare oggetti di uso comune aiutasse i ragazzi a trovare parole ed esempi per parlare con maggiore esattezza di forma, dimensioni, somiglianze e... identità.
Come sempre una parte delle nostre aspettative non si sono realizzate, tuttavia la situazione ci ha aiutato a seguire con più attenzione e a capire meglio quello che i ragazzi pensavano, quello che per loro era evidente, rendendoci conto che spesso a loro sfuggiva completamente quello che a noi sembrava molto importante.
È stato interessante vedere come, nel corso della discussione, i raggruppamenti proposti si espandessero o si contraessero, includendo o escludendo caratteristiche differenti ma, soprattutto, imponessero cambiamenti di nome per i raggruppamenti stessi.
Ecco, per esempio, il passaggio da famiglia di bottiglie, bottiglie in generale, recipienti...

Maria - *abbiamo portato tutti questi oggetti per vedere se anche questi potevano essere divisi in famiglie*
- *quanti tipi di famiglie vedete?*
8 - *io faccio la famiglia bottiglie, ma ci possono essere tante famiglie bottiglie, che possono non essere uguali*
- *infatti sono sempre famiglie bottiglie ma appartengono ad un'altra famiglia*
8 - *per me io questa qui non ce la voglio, però... No, per me non è della stessa forma qui è più scivolosa, e qui è meno scivolosa. Queste due andrebbero bene*
18 - *io metterei tutte le bottiglie insieme*
- *ma allora non è una forma*
18 - *la chiamerei famiglia di bottiglie*
13 - *se lei fa così allora io potrei fare così, la famiglia recipienti*
11 - (prende le bottiglie) *le ho messe insieme prima perché hanno la stessa forma e poi servono per fare la stessa cosa.*

Si guardano i materiali, si guarda la grandezza... mentre si cerca di guidare i ragazzi a non divergere troppo perchè l'osservazione di minute differenze (che a noi adulti sembravano trascurabili) può farci allontanare troppo dal nostro obiettivo.

- *la famiglia polistirolo è tutta dello stesso materiale*
2 - *potrei mettere queste insieme perché sono piccole, queste perché sono medie, e queste perché sono grandi*
Maria - *troviamo oggetti che hanno forma uguale*
Pablito - *vorrei chiedere una cosa a un rappresentante di quelli che dicono che questi cucchiai sono uguali: il fatto che abbiano la stessa forma, che abbiano forma uguale, non vuol dire che siano grandi uguali, perché uno è più piccolo* (cucchiaio da tavola e cucchiaino dello stesso "servizio")
8 - *allora è vero, sono simili: simile vuoi dire che la forma è uguale, però non è della stessa grandezza*
14 - *simile è uguale la forma ma diversa la grandezza*
8 - *un momento: non sono convinto, non è simile, è* **uguale**, *perché tu hai detto la forma, mica il cucchiaio, la forma è uguale, i cucchiai sono diversi*
Pablito - *io ho chiesto se la forma di questi due oggetti è uguale, non se questi due oggetti sono uguali*

17 - *allora la forma è uguale*
Pablito - *La forma è la stessa, come per i triangoli che avete messo nella stessa famiglia, anche se alcuni erano più grandi e altri più piccoli, ed erano diversi per grandezza; proprio come stavano nella stessa famiglia i triangoli di Emanuela, alcuni grandi e altri piccoli, ma sempre con i due lati uguali. E tutti avete detto che i triangoli della stessa famiglia hanno la stessa forma. Lo stesso accade per alcuni di questi oggetti che potrebbero stare nella stessa famiglia.*

Nel linguaggio comune si dicono simili oggetti pressappoco uguali, sono simili alcuni gemelli, si parla di somiglianze tra figlie e genitori... e questo non è certo di aiuto quando si vuol parlare di similitudine in un contesto geometrico. Per questo, sperando di rendere finalmente evidente la differenza di significato tra i termini "uguale" e "simile", ci eravamo molto impegnati nella ricerca degli oggetti adatti da portare in classe. Nei gruppi di oggetti uguali i ragazzi mettono insieme, "perché hanno la stessa forma", cucchiai e cucchiaini, piatti e piattini, tazze e tazzine, assolutamente insensibili agli aspetti relativi alla dimensione che a noi sembravano evidenti e importantissimi.
Anche se le definizioni di Dibi e Donata sono corrette, è facile intravederne la fragilità e prevedere che verranno facilmente dimenticate in un diverso contesto. È interessante, comunque, lo scambio di osservazioni tra Dibi e Pablito, che precisano, a proposito della coppia cucchiaio-cucchiaino, che le forme sono uguali ma che gli oggetti sono diversi.
Che si tratti di un primo passo verso la capacità di riconoscere proprietà astratte in oggetti concreti?

14. Confronti di volumi

Dopo aver raggruppato "per forma" oggetti diversi ci sembrava utile ragionare anche sul volume degli oggetti stessi, guardando sia lo spazio occupato, cioè il loro effettivo volume, sia le quantità che alcuni di loro potevano contenere.
I ragazzi, che fin dalla seconda avevano lavorato sul galleggiamento, erano già esperti su come misurare lo spazio occupato nell'acqua da tazze, bicchieri e cubi ed avevano a disposizione una varietà di recipienti graduati in cui poterli immergere.
Usando vari beker, cilindri e contenitori da cucina era facile guardare il livello iniziale dell'acqua e calcolare di quanto il livello stesso si alzava dopo aver ben immerso l'oggetto.
La differenza (ovviamente in cm^3) corrispondeva allo spazio occupato dall'oggetto. È stato interessante notare il modo in cui veniva calcolato il volume di oggetti che restavano a galla, con tutti i diversi tentativi di misurare solo il loro volume e non anche quello del dito che li spingeva sotto il livello. Non abbiamo approfondito in questa occasione l'idea dell'unità di misura del volume: i ragazzi parlavano di cm^3 perchè lo trovavano scritto sui recipienti, ma non si sono soffermati sul significato di questa notazione.
Abbiamo proposto quindi di confrontare i volumi che potevano essere contenuti da oggetti vuoti, come tazze, bicchieri, e bottiglie di varia forma. La sfida era di valutare ad occhio quelli che avrebbero potuto contenere la stessa quantità di fagioli, riso o acqua. I recipienti venivano riempiti fino all'orlo, e poi? Come si poteva sapere che i due contenuti erano uguali? E quelli che contenevano più riso che fagioli potevano avere lo stesso volume?
Per dare un'idea di quanto potesse essere il volume di 1 cm^3 abbiamo distribuito ai ragazzi pipette da laboratorio, da 1, 5, 10 e 25 cm^3, chiedendo loro di pipettare definite quantità di acqua e metterle in bekerini graduati che avrebbero verificato la correttezza della loro procedura.
Servivano tre pipette da 10 e una da 5 per ottenere un volume equivalente ad una pipetta da 25, cinque pipette da 1 per fare un volume equivalente ad una pipetta da 5 e così via.
Il passaggio dai volumi dell'acqua a quelli del riso o dei fagioli è stato abbastanza immediato: il contenuto di una tazza veniva travasato in uno dei recipienti graduati che, ad occhio, poteva contenerlo, si teneva nota del livello raggiunto, si svuotava il recipiente e si riempiva con il nuovo contenuto confrontando le differenze tra i livelli raggiunti.

I risultati di queste operazioni, e soprattutto i confronti tra le quantità di materiali diversi che riempivano uno stesso volume, e cioè occupavano uno stesso spazio, era spesso inaspettata.
Si presentava ovviamente il problema dei "buchi" così un recipiente poteva essere riempito fino all'orlo con sassolini, poi poteva ancora essere riempito sino all'orlo con la sabbia, poi ancora, con molta attenzione, poteva essere riempito sino all'orlo di acqua.
Qual era allora il modo giusto di misurare il volume del recipiente?

Altre riflessioni che portavano a concettualizzare il significato delle unità di misura riguardavano la scelta dei "campioni" usati nelle diverse situazioni e i modi, anche i gesti, con cui venivano usati. Si potevano cosi confrontare i modi di misurare le diverse variabili, individuando le procedure adatte a ciascuna, specifiche per i volumi, per le lunghezze o per gli angoli.
Il campione unitario di volume (e i suoi multipli) era espresso dai numeri indicati sui recipienti, e i gesti erano quelli di riempire e confrontare i livelli; il campione unitario di lunghezza (e i suoi multipli) era espresso dai numeri indicati sul righello, e i gesti erano quelli di affiancare la linea da misurare con il righello, a partire dal suo zero; il campione unitario di angolo (e i suoi multipli) era espresso dai numeri indicati sul goniometro, che doveva essere sovrapposto, a partire dal suo zero, all'angolo da misurare; il campione di angolo retto era dato senza numeri, dalla forma dell'angolo della squadra che doveva essere disposto sopra l'angolo da misurare, e il campione di piatto... era dato da una bella lastra di perspex su cui dovevano essere distesi gli oggetti di cui controllare la piattezza.

Fig. 56 - Confrontare e misurare volumi

Le attività sul confronto dei volumi costituiscono un buon esempio di come si possa affrontare il complesso tema della misura cercando di evitare la sequenza scolastica classica che si limita ad introdurre le principali unità di misura standard (metro, metro quadrato, litro, chilogrammo) e a proporre esercizi sui loro multipli e i sottomultipli (decimetro, centimetro, millimetro, decametro, ettometro, chilometro, ecc).

Il realtà il tema della misura merita ben altri approfondimenti relativi a questioni più profonde e generali che possono ad esempio essere evidenziate a partire dalle seguenti domande:

- Quali proprietà sono "contabili" o "discrete"? Partendo, ad esempio, dal confronto tra un bicchiere pieno d'acqua ed uno pieno di chicchi di riso o di biglie di vetro.
- Quali proprietà sono invece continue? (In realtà la maggior parte delle proprietà fisiche sono continue - lunghezza, distanza, intervallo di tempo, velocità, superficie, volume, peso, forza, temperatura, tensione elettrica, luminosità, ecc. Le proprietà continue sono quelle che, per essere contate, devono essere "discretizzate", cioè spezzate in parti uguali. L'esempio tipico è quello della minestra quando diciamo "dammene solo tre mestoli").
- Come si fa ad attribuire un numero ad una proprietà discreta o ad una proprietà continua una volta che sia stata discretizzata?
- Quando dice che sei alto, ad esempio, "1 metro e 37" cosa intendi? È possibile esprimere la stessa altezza con un'unica unità di misura?
- Posso sommare i metri con i chilogrammi? E i metri con i chilogrammi? E i metri con i metri quadrati?
- Ha senso dire che la casa ha un giardino di 1.000 metri?

Come si vede le questioni richiamate da queste domande riguardano trasversalmente la fisica, la matematica, la percezione, il linguaggio tecnico comune (nel quale, ad esempio, non si distingue tra chilogrammo peso e chilogrammo massa, ecc) e preparano il terreno alle risistemazioni formali che vengono normalmente trattate nei primi anni della scuola secondaria (teoria della misura, grandezze commensurabili e incommensurabili, numeri razionali, irrazionali, trascendenti, reali, ecc).
Non è un caso che l'argomento "misura" è presente sia nelle Indicazioni nazionali di matematica che in quelle di scienze, ed è richiamato spesso nelle Indicazioni di geografia, storia, tecnologia, arte e musica.
Per quanto riguarda le teorie di riferimento possiamo riferirci, ancora una volta, al testo di geometria di Enriques, ma vale anche la pena di riguardare gli studi di Gerard Vergnaud sull'apprendimento della matematica ("Il bambino, la matematica, la realtà", Armando, 1994) nel quale viene dato ampio spazio al numero come misura, sia in termini concettuali che dal punto di vista psicocognitivo: in matematica quando diciamo "7" sottintendiamo sempre una misura, nel caso più banale la numerosità di un insieme o la posizione in cui si trova un elemento di una serie ordinata (ho viaggiato per 7 giorni; ho preso 7 in francese).

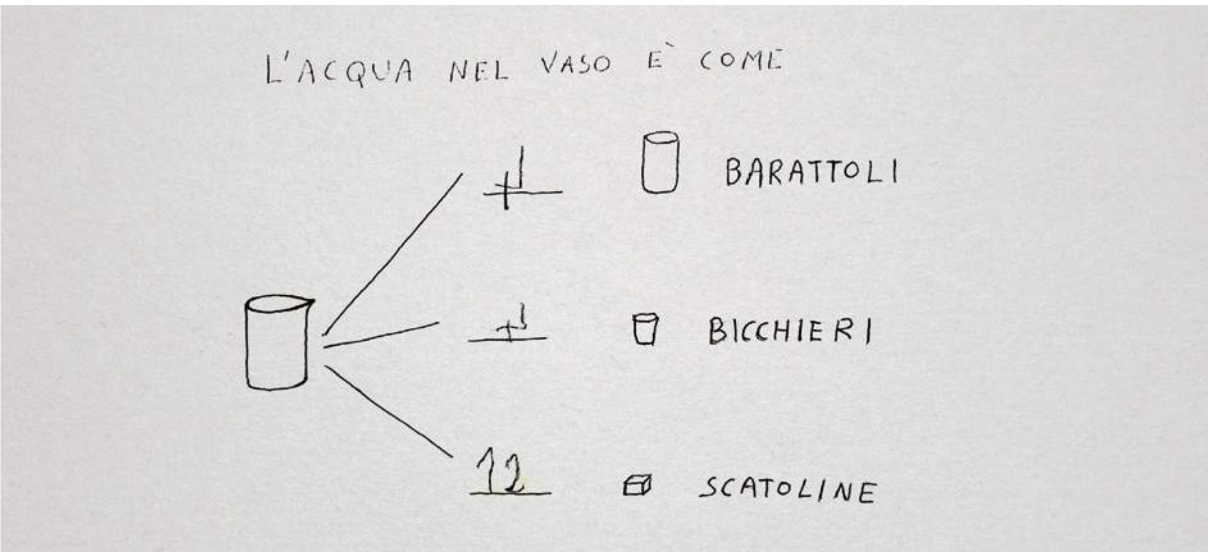


Fig. 57 - Composizione di volumi

15. Triangoli simili

Negli incontri successivi si continua a lavorare sull'idea di forma provando a distinguerla e a differenziarla dall'idea di grandezza, imparando (con fatica) ad usare correttamente, in senso geometrico, i termini uguale e simile.
I ragazzi non conoscono ancora i nomi che, secondo la geometria, si riferiscono alle caratteristiche dei loro triangoli e li individuano chiamandoli in modi che, secondo loro, corrispondono a loro specifiche proprietà:

> 2 - *io ho scelto questi della mia famiglia e li ho chiamati triangoli quadrati, perché come i quadrati se li giri hanno sempre la stessa forma.*

Servono però altre esperienze, altre osservazioni, altri gesti, altre precisazioni, per aiutare i bambini a padroneggiare meglio il problema: bisognerà lavorare ancora molto per individuare le caratteristiche dei diversi triangoli, confrontarne gli angoli, trovare le relazioni tra le lunghezze dei lati e giungere a definire i criteri di similitudine.
Come per gioco, mentre i ragazzi lo osservano, il maestro sovrappone, dal più grande al più piccolo, tre triangoli di diversa grandezza, ma tutti equilateri. I ragazzi cercano anche loro di sovrapporre gli angoli dei loro triangoli grandi e piccoli, ovviamente non sempre ci riescono: cominciano i commenti e i tentativi di spiegazione, alla caccia delle somiglianze e delle differenze. Per adesso a noi interessa soltanto mettere in evidenza le caratteristiche delle diverse forme e solo quando queste saranno evidenti e condivise da tutti si preciseranno i criteri di similitudine geometrica.

> 1 - *così si vede un triangolo solo!*
> \- *e tutte quelle righe* (i lati) *sono messe a scala*
> 5 - *per me sono tutti della stessa forma anche se certi sono più grandi o più piccoli*
> Maria - *per poter dire se sono della stessa forma che cosa hai guardato?*
> 2 - *ho guardato i lati e poi li ho messi uno sopra l'altro per vedere se combaciavano. Per esempio mettevo questo sopra a quest'altro, e ci stava anche se uno è più grande e uno è più piccolo*
> Maria - *nei due triangoli di quella serie lì, i lati hanno la stessa lunghezza?*
> 2 - *non hanno i lati uguali*
> Maria - *"lunghi" uguali.*

Proprio la sovrapposizione dei triangoli potrebbe servire ad individuare meglio alcune proprietà e a specificare con parole, per esempio, che nei triangoli della stessa famiglia i lati possono essere diversi "per lunghezza".
D'altra parte, sempre nella stessa famiglia, gli angoli si sovrappongono bene (e i lati fanno una bella "scaletta") mentre in quelli di famiglie diverse questo non succede. La sovrapposizione, però, deve essere fatta in un modo ben preciso, altrimenti la "scaletta" non viene più. Bisogna cercare di descrivere questa "scaletta" con termini appropriati, capire come mai non sempre viene, darsi una spiegazione e trovare la regola per farla venire bene e riconoscere tali regole come metodo per individuare i triangoli della stessa famiglia. Ovviamente questo lavoro serve per portare lo sguardo sugli angoli dei triangoli, che richiamano l'attenzione dei ragazzi assai meno della più evidente differenza di lunghezza dei lati.
Ecco alcuni commenti:

> 10 - *per me è tagliata male la base*
> 4 - *vanno bene qui, se li metto così, ma se li metto in quest'altro modo non vanno più bene*
> 18 - *non sono della stessa famiglia. Vanno bene i due lati, quest'altro no; se mettiamo bene questi due, non torna l'altro, e se metto bene l'altro, allora non va bene questo*
> 17 - *posso dire che cosa hanno di simile questi triangoli, perché non sono tagliati precisi. È uguale la posizione come sono messi, uno sopra l'altro, e hanno tutti una punta... è uguale la posizione, la famiglia...*

1 - *per essere della stessa famiglia, gli angoli devono essere uguali, e i lati devono essere tutti paralleli. Se non è parallelo, quello diventerebbe ... storto.*

> **Enriques:** Se due angoli di un triangolo sono uguali rispettivamente a due angoli di un altro triangolo, anche i rimanenti angoli sono uguali.
> Sono uguali due triangoli aventi ordinatamente uguali un lato e due angoli ugualmente posti rispetto ad esso.
> Se un triangolo è equilatero è anche equiangolo

Non tutti, impegnati a sovrapporre con cura i lati dei vari tipi di triangoli, colgono l'osservazione di Marco che invece si riferisce con chiarezza agli angoli che devono essere uguali. Infatti, anche facendoli variamente ruotare l'uno sull'altro, non sempre la sovrapposizione dei triangoli è possibile. Dopo molti tentativi, riusciti e non riusciti, i ragazzi devono anche trovare le parole giuste per descrivere quello che hanno fatto. Alcuni parlano della "forma dei lati", di lati che si congiungono, altri parlano di angolazione...
Comunque il gioco delle sovrapposizioni comincia a diventare efficace e, come sempre, quello che le mani fanno aiuta gli occhi a vedere e la mente a riflettere. Faticosamente, anche le parole assumono il loro significato e permettono di dare forma alle idee.

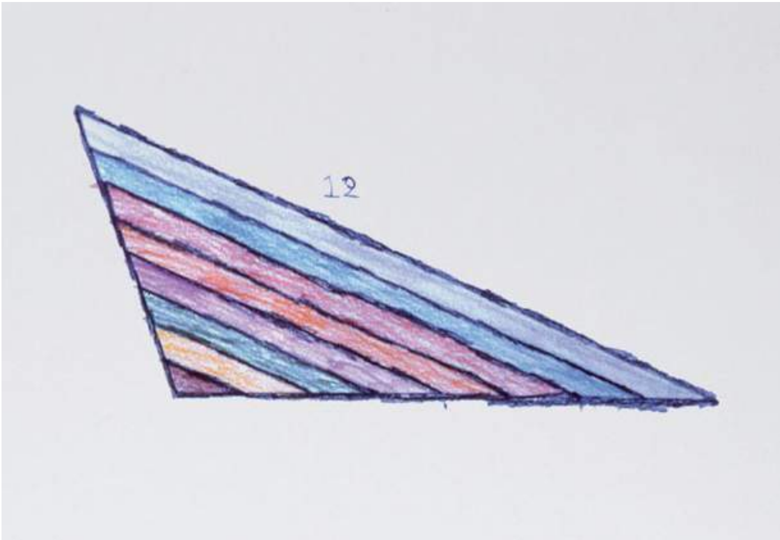


Fig. 58 - I triangoli a scaletta

16 - *io ho controllato se tutti i lati corrispondessero, se questo lato qui corrispondeva con quello di sotto*
Maestro - *sai specificare meglio che cosa dei lati hai controllato? la lunghezza?*
16 - *la lunghezza è diversa; ho guardato la forma dei lati, se erano più aperti sotto, o se erano aperti uguale*
3 - *io vedo così: sono messi così che tu vedi sempre e soltanto il più grande; perché hanno la stessa forma, sono della stessa forza*
12 - *hanno di uguale una angolazione, così... hanno di uguale l'angolazione dei lati, i gradi insomma, che si possono misurare*
13 - *io ho visto prima i lati che si congiungono l'uno con l'altro, si sovrappongono; ho visto gli angoli che erano dello stesso tipo ma non lo so dire. Ho visto gli angoli e i lati, i lati si sovrappongono e si vede che sono uguali e gli angoli devono stare uno sopra l'altro.*
Maria - *allora gli angoli come devono essere?*
13 - *uno sopra l'altro*
Maria - *uno sopra l'altro, e quindi?*
13 - *sono uguali*
10 - *simili*
13 - *però i lati non è che devono essere lunghi uguale, sono gli angoli che devono essere uno sopra l'altro*
14 - *io voglio dire che sono d'accordo sia con Diego che con Andrea, ossia che una figura, per vedere se è di una stessa famiglia di un'altra, prima bisogna vedere gli angoli se vanno bene e poi i lati: perché magari uno, se un angolo va bene, e lo abbiamo visto con quelli di Sara, poi magari*

esce un po' da una parte, allora non sono della stessa famiglia, e allora così anche ad occhio si vede... se sono o no della stessa famiglia, ad occhio
Maestro - *e sapresti dire che cosa vedi 'ad occhio"?*
14 - *sono messi come se fosse uno solo, ossia uno grande che dopo sembra diviso in tante righe, invece sono gli altri triangoli*
Maria - *poco fa alcuni tuoi compagni stavano dicendo che bisognava guardare l'angolazione, altri che bisognava guardare i lati. Secondo te, dicevano due cose diverse, o volevano dire la stessa cosa?*
10 - *per me è la stessa cosa, ma è meglio guardare l'angolo*
18 - *io voglio dire una cosa contro di Massimo, che lui non può guardare soltanto un lato, ma li deve misurare tutti e tre.*

> **Enriques:** Se in un triangolo due lati sono divisi in un medesimo numero di parti uguali le congiungenti i punti di divisione che, a partire dal vertice comune, occupano ugual posto, sono parallele al terzo lato

Tra molte esitazioni, che il maestro rileva e tende a mettere in evidenza, i ragazzi cominciano a notare l'importanza della sovrapposizione degli angoli. Ed è sempre il maestro che, proiettando le figure dei triangoli alla lavagna luminosa, invita i ragazzi a chiarire meglio cosa intendono per "angolo".

Maestro - *io ogni tanto sento dire la parola angolo: perché angolo?*
- *l'angolo retto*
Maestro - *che è angolo?*
17 - *quello che Marco aveva mostrato sulla lavagna*

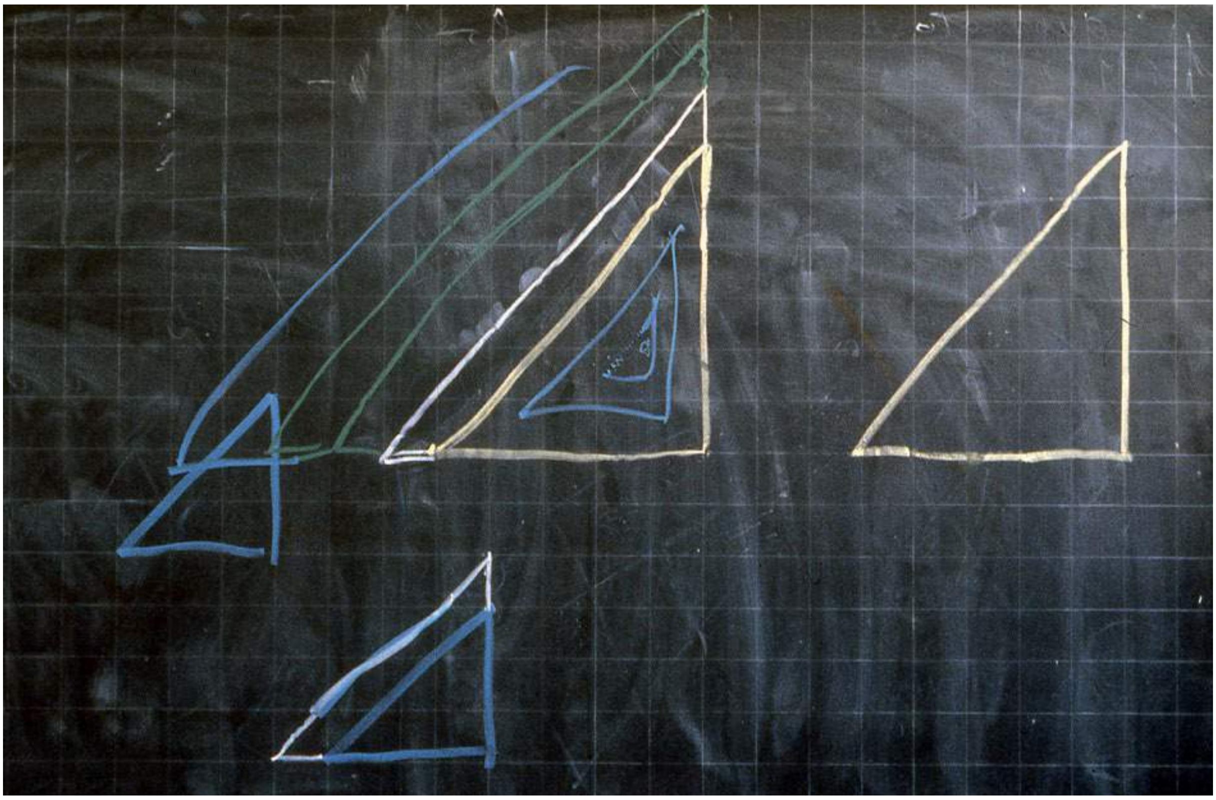


Fig. 59 -Ingrandimenti e riduzioni alla lavagna

Maestro - *Emanuela, facci vedere quale è l'angolo, ce ne stanno diversi di angoli*
1 - *ci stanno gli angoli retti e gli angoli non retti*
Maestro - *siccome Emanuela ha indicato questo punto qui, per indicare l'angolo, vorrei sapere se siete d'accordo che questo è l'angolo*
- *per me ce ne stanno sei*
1 - *quelli che vedo io sono tre*
17 - *un angolo sarebbe una specie di punta.*

I ragazzi ricalcano sui fogli alcuni dei triangolini a disposizione e cercano di fare misure non sempre utili per raggruparli in famiglie. Altri compongono quadrilateri con coppie di triangolini e cercano di spiegare i risultati ottenuti.

> **Enriques:** Se un triangolo ha due angoli uguali, ha uguali anche i lati opposti. Se un triangolo è equilatero è anche equiangolo

Le precisazioni, anche su parole che sembrano usate correttamente, sono sempre efficaci: permettono di riflettere su quello che i ragazzi hanno in mente, mettono in evidenza trame di pensiero che spesso gli adulti dimenticano di percorrere, danno l'opportunità di accorgersi delle eventuali difficoltà, delle conoscenze acquisite e delle direzioni su cui si sviluppa il pensiero. Qui, per esempio, ritornano nozioni imparate in altri momenti, sugli angoli retti e non retti, interni e esterni... anche se il particolare contesto non lo richiederebbe.
La lavagna luminosa, sempre a disposizione, serve a proiettare sul muro le ombre dei triangoli che, questa volta, sono di plastica trasparente, ritagliati dalle abituali foderine dei quadernoni, e di colori diversi.

Pablito - *ci sono quattro triangoli sulla lavagna; e questo quinto è il triangolo di Mayer: con quale dei quattro fa famiglia? si vede ad occhio ma possiamo fare anche un controllo preciso. Quando si mette un triangolo sopra un altro per vedere se sono uguali, come si fa a cercare l'angolo giusto?*
1 - *si fanno combaciare gli angoli*
Pablito - (sovrappone un angolo) *così andrebbe bene?'*
1 - *quello sì, ma devi fare anche gli altri. Aspetta, lascia un attimo, lo devi fare, diciamo, dritto, come è dritta la base...*
Pablito - *allora secondo te questi due sono della stessa famiglia o no?*
1 - *no, perché diciamo... manca un pezzo*
10 - *non puoi provare a girarlo?*
Pablito - *a girare come?*
- *eccolo*
- *così combacia*
- *è come dicevo io....*
Pablito - *allora sono o non sono della stessa famiglia?*
- *devi provare tutti gli angoli*
Pablito - *provo tutti: il primo sembra che va, ora provo l'altro... così va bene.*
1 - *sì, prima non era messo bene, non era messo dritto alla base. Ossia la base non era a scalino dritto, come se tu stessi su uno scalino che ti è caduto, così invece è uno scalino normale*
Pablito - *potrei fare così; questo combacia così, quest'altro poi lo faccio combaciare così, e l'altro così - combaciano tutti e tre. Se il primo angolo combacia bene posso anche farlo scorrere e non girare ogni volta, comunque posso sempre sovrapporlo*
5 - *se vedo questi triangoli,* (sovrapposti) *vedo che il primo resta fuori e poi vedo tutte delle strisce, contrariamente ai quadrati, per esempio se tu prendi un quadrato e ci metti un altro quadrato sopra ti vengono due strisce così. E ogni figura credo che abbia una striscia... come si può dire, una strisciatura diversa.*

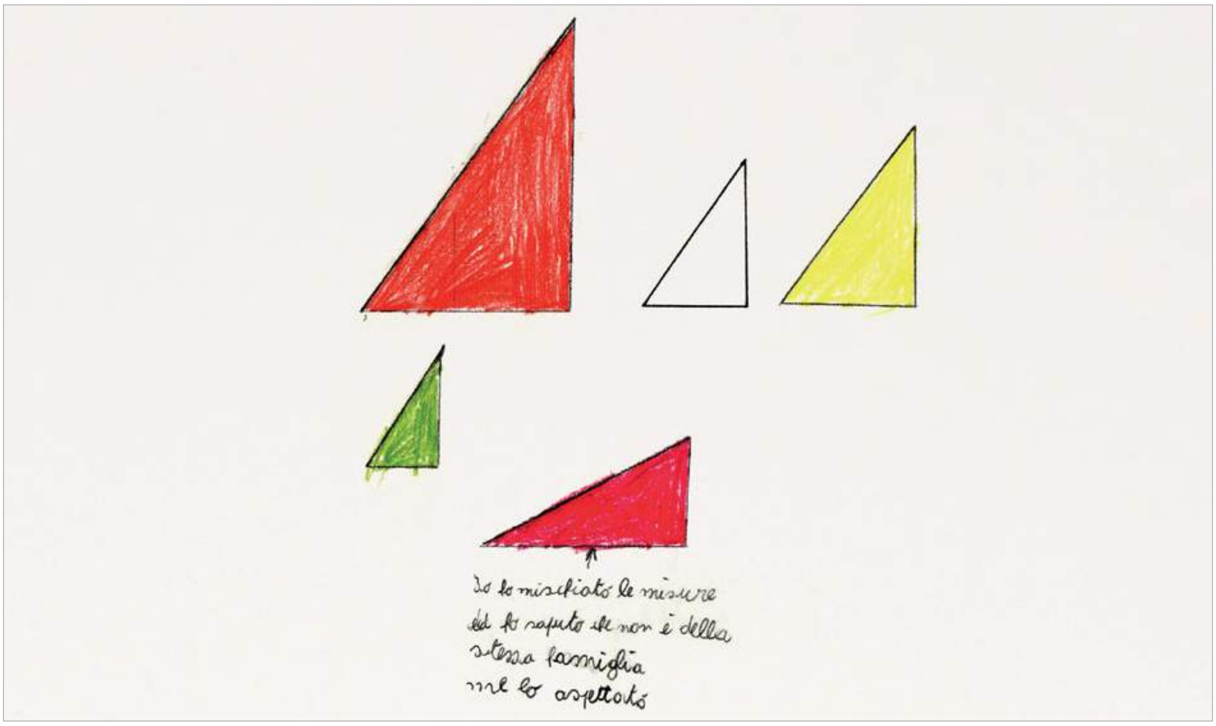


Fig. 60 - Come raggruppare in famiglie?

16. Composizioni di triangoli

La conclusione sembra ormai vicinissima: per capire se due triangoli sono della stessa famiglia bisogna vedere se gli angoli si possono sovrapporre, vedere se i lati sono a scaletta, vedere la "striscia" parallela... ma bisogna fare diversi tentativi, e provare tutte le possibili sovrapposizioni, perché altrimenti è facile sbagliarsi. Sembrerebbe quindi arrivato il momento di proporre attività che portino a definire i criteri di similitudine tra triangoli, ma le figure colorate, sul piano della lavagna luminosa, guidano quasi insensibilmente i ragazzi ad un nuovo approfondimento.
Infatti è divertente accostare e combinare i triangoli per ottenere nuove forme le cui ombre vengono proiettate sul muro. Comunque i triangoli vengono sempre uniti mettendo vicini i lati di uguale lunghezza.

2 - *io avevo visto che mettendo vicini due triangoli uguali veniva un rombo*
Pablito - *mettiamoci d'accordo: in quanti modi possiamo mettere insieme i triangoli per fare altre figure: per esempio così che figura viene?*
- *ci sono moltissimi modi*
- *così viene una piramide*
- *è una vela*
12 - *così sembra un pacchetto*
5 - *dipende da come metti il triangolo: ossia perché nel modo in cui lo avevi messo prima diventa una figura, così ne diventa un'altra, e poi dipende pure da quali triangoli metti: ce ne stanno molti di triangoli*
Maria - *tu avevi detto che se li mettevi insieme diventavano un rombo, prova a vedere se è vero*
5 - *ci vuole un altro tipo di triangolo, con questi non si può fare ma si può fare un aquilone*
Pablito - *e per fare un rombo che triangoli ti servirebbero? Poi volevo sapere che differenza c'è*

tra questa figura qua (costruita con due triangoli ottusangoli)...
10 - *questo è un aquilone preciso preciso...*
Pablito - *...e quest'altra: rovescio il triangolo e lo metto vicino*
12 - *una è un rombo, e l'altra è un aquilone*
Pablito - *si ma qual'è la differenza*
- *che i triangoli sono messi in due modi diversi*
8 - *così è un rettangolo.*

È difficile capire come scegliere i diversi triangoli e come disporli per costruire le figure-forme volute. Bisogna guardare gli angoli retti e non retti, bisogna guardare le lunghezze dei lati, tutte uguali o diverse due a due... bisogna guardare contemporaneamente gli angoli e i lati per costruire e dare il nome giusto alle figure ottenute. I ragazzi riconoscono i quadrilateri ma alcuni, pur avendo quattro lati, hanno forma di aquiloni o di frecce... E se oltre ad accostarli, come propone Pablito, si ribalta il triangolo di una coppia si ottengono ancora altre figure... Il maestro, quindi, interviene per saggiare la solidità delle opinioni dei ragazzi e, soprattutto, per portare l'attenzione sul significato di parole che, nell'accalorarsi della discussione in cui le voci e le idee si accavallano, vengono usate in modo impreciso. Per conferma, si ripropone ai ragazzi una delle schede su cui hanno già lavorato precedentemente (v. fig. 43), con la richiesta di individuare le figure con gli angoli retti: devono sceglierle tra quadrilateri disposti variamente nello spazio e questa volta gli angoli retti vengono riconosciuti anche nei rettangoli messi per traverso.
Intanto si discute sul significato della parola rettangolo.

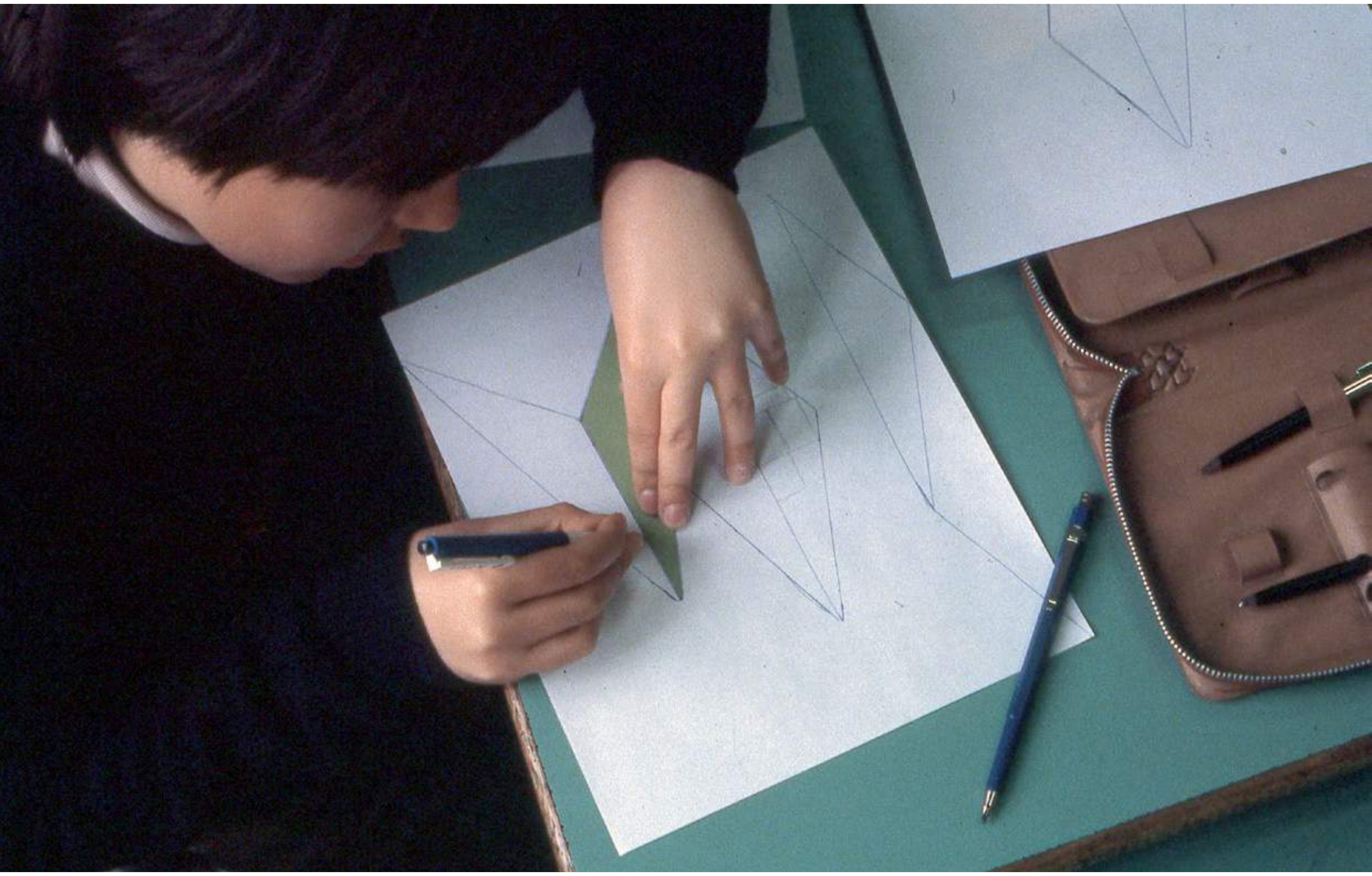


Fig. 61 - Composizioni di triangoli

Maestro - *che vuol dire rettangolo secondo te, visto che usi questa parola?*
- *angoli retti*
Maestro - *e allora queste figure sono tutte e due con gli angoli retti? che sono questi angoli retti?*
- *quelle figure lì, sono due quadrilateri*
- *c'è il triangolo rettangolo*

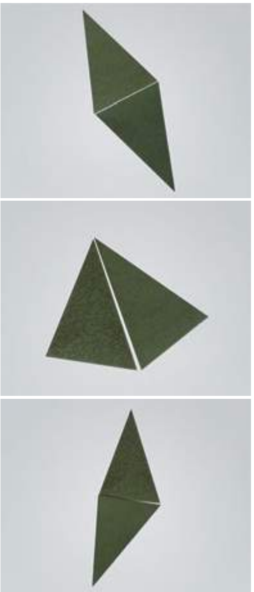
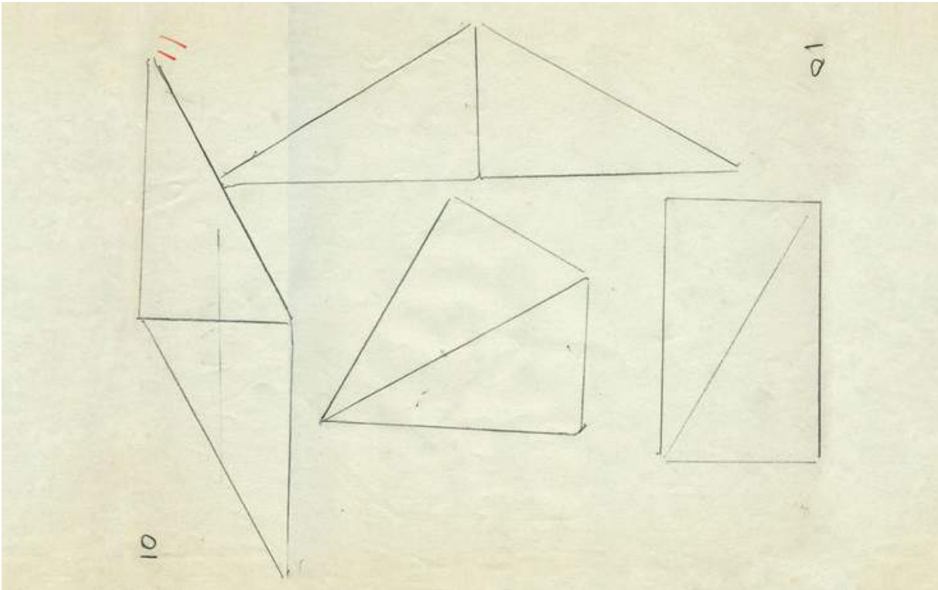



Fig. 62 - Coppie di triangolini uguali | **Fig. 63** - Coppie di triangolini uguali

Maestro - *se dici che sono tutti e due rettangoli, dovrebbero avere gli stessi angoli, e allora?*
12 - *si fa una misura dell'angolazione*
Maestro - *e come si misura un angolo retto: ce l'hai una squadra? Questo è un angolo retto?*
17 - *si, infatti questa figura si chiama rettangolo*
Maestro - *come potresti verificare se è veramente rettangolo? questo è retto...*
- *e questo altro no...*
Maestro - *questo angolo di questa squadra è retto, puoi confrontare tutti gli angoli con questo della squadra per vedere se anche loro sono retti*
6 - *il quadrato ha la stessa legge del rettangolo, ma si deve distinguere per qualche altra cosa: il quadrato ha tutti e quattro i lati uguali, mentre il rettangolo no*
Maria - *ha i lati uguali per che cosa? per posizione, per che cosa?*
Maestro - *per lunghezza: e gli angoli del quadrato sono come questi del rettangolo?*
Pablito - *con i triangolini che avevate al banco, si può fare un quadrato o no? e con quali triangolini?*
- *si, con quelli rettangoli*
Pablito - *provateci, e poi portatemi a far vedere il quadrato che avete costruito.*
2 - *io voglio dire contro Emanuela che ha detto che il quadrato ha tutti i lati uguali: allora anche il rombo ha tutti i lati uguali*
6 - *solo che il rombo è diverso, non ha gli angoli uguali.*

> “Ogni quadrangolo i cui lati opposti sono paralleli dicesi parallelogramma
> In un parallelogramma, i lati opposti sono uguali;gli angoli opposti sono uguali; le diagonali si bisecano scambievolmente
> Due parallelogrammi che abbiano rispettivamente uguali due lati consecutivi e l'angolo compreso sono uguali”

Fig. 64 - Qual è il rettangolo?

17. Composizione e scomposizione di triangoli

Oggi sul grande foglio in mezzo al cerchio dei ragazzi, su quello che chiamiamo il nostro "palcoscenico" sono disposti dei grandi triangoli di cartoncino (uno per ogni famiglia) e una quantità di triangolini più piccoli, delle differenti famiglia ma tagliati in modo da mettere in evidenza una proporzionalità semplice nelle lunghezze dei lati (1: 5).
La discussione si apre osservando un triangolo rettangolo grande e vari triangolini rettangoli piccoli.

Si puntualizzano, ancora una volta, le cose che dovrebbero essere ormai ben chiare... per accorgersi ovviamente che qualcuno ha ancora bisogno di fissare meglio le idee.

Paolo - *questi triangoli sono della stessa famiglia, uno grande e tutti questi altri piccolini, che noi abbiamo cercato di tagliare tutti uguali*
17 - *facciamo finta che sono tutti uguali*
13 - *tutti simili*
Paolo - *Questi piccoli non sono tutti simili, sono proprio tutti uguali tra loro e tutti della stessa famiglia. Domanda: è possibile mettendone insieme un pò, fare un triangolo più grande che sia della stessa famiglia?*
- *come quello grande?*
Paolo - *o più grande o più piccolo, non importa, purché sia della stessa famiglia.*
- *È facile*

- *posso provare? Carlo ha già provato: uno li può mettere come gli pare no?*
Debora comincia a coprire il triangolo grande con i triangolini
Paolo - *quanti ce ne vorranno per coprirlo tutto? provate a guardare*
- *9, 10..*
Marco - *10 in tutto*
Maestro - *io avevo detto dodici: si potrebbe vedere se con dodici viene? ma sempre della stessa famiglia. Se volete, prendetevi un foglio e disegnate!*
1 - *per me dodici no*
Maria - *bisognerebbe trovare una regola per sapere quanti di questi triangolini ci vogliono per riempirne uno intero della stessa famiglia*
1 - *si potrebbe ingrandire la base... si potrebbe aggiungerne uno alla base e poi vedere, ma forse ce ne vorrebbero 18*
Maria - *se allunghi la base di uno di quanti altri hai bisogno per formare un triangolo grande?*
16 - *per me sedici*
Maria - *e per farne uno più piccolo di quello quanti te ne servirebbero?*
16 - *quattro*
Maria - *allora vediamo se questi numeri sono messi con una regola*
16 - *4, 9, 16...*
Maria - *e il prossimo quale sarà*
1 - *22*
16 - *ho capito: uno più tre, quattro, e quindi cresce di tre; quest'altro cresce di cinque, quindi due in più dell'altra volta; quest'altro cresce di sette, e quindi due in più dell'altra volta: e poi ancora...*
14 - *qui è di venticinque, cinque per lato, perciò cinque per cinque venticinque; questo lato è di due e il triangolo è di quattro, perciò due per due quattro: scommetto che se ne faccio uno da 7x7 dentro ce ne stanno quarantanove. Per esempio, ma da due non c'è...*
- *Questo è da 100*
Maria - *e quanti ce ne hai messi per lato? guarda anche nei triangoli più piccoli, quanti ce ne sono in tutto e quanti ce ne hai messi per lato*
1 - *1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144...*
3 - *1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 78*
5 - *da uno a quattro c'è distanza tre, io aumento di due e viene cinque, infatti da quattro a nove viene cinque*
17 - *perché aumenti di due?*
5 - *aumenti ancora di due, è 7, infatti da 9 a 16 c'è 7 e poi aumento ancora di due e viene nove, da 16 a 25 c'è 9; ecc.*
Maestro - *bisogna rifare un pò di conti, per vedere se quello che dice Marco va d'accordo con quello che dice Andrea, capire se è proprio aumentando di due...*
1 - *forse io ho sbagliato i conti*
5 - *io non ho sbagliato, perché ho seguito sempre il conto*
1 - *anche io sono arrivato a cento e poi mi sono accorto che avevo sbagliato*
14 - *io a te piano piano ti avevo detto come si facevano a trovare: uno per uno fa uno, e c'è il triangolo da uno; poi, due per due fa quattro, e c'è il triangolo da quattro, poi 3 è 9 e 4 è 16, 36 e 49 io non li ho messi ma vengono*
8 - *10 per 10 cento.*

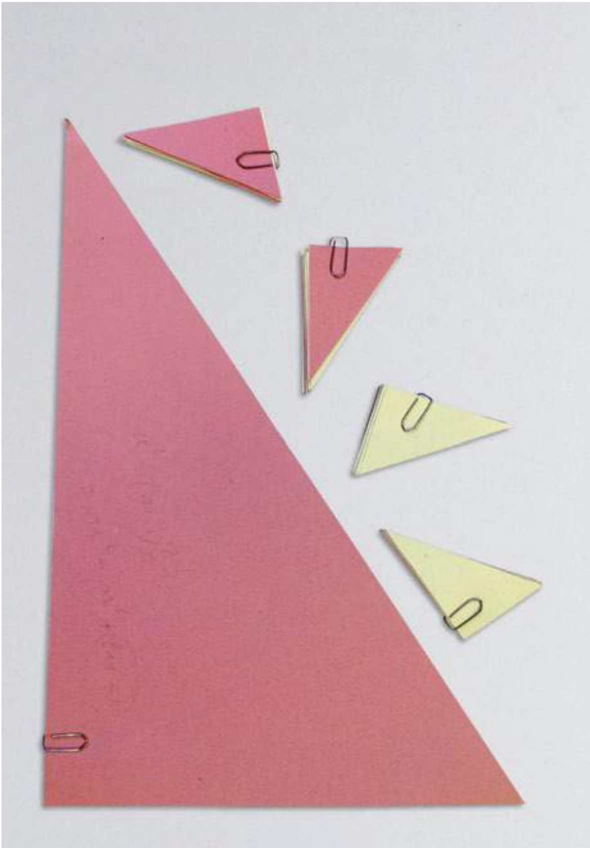


Fig. 65 - Un triangolo grande da ricoprire con i triangoli piccoli

18. Il triangolo strano

Bisogna provare a generalizzare sia la regola di Marco che quella di Andrea per vedere se e come valgono anche per riempire o costruire triangoli di altre famiglie.
Si cerca la regola per un isoscele ma... i problemi non finiscono mai. Infatti, appena alcuni ragazzi hanno trovato e condiviso con gli altri la loro regola si presenta un nuovo caso strano. Il maestro mette sul palcoscenico un altro triangolo rettangolo che però non si riuscirà a ricoprire con i triangolini a disposizione.
Vogliamo che i ragazzi ragionino sulla proporzionalità tra le lunghezze dei lati, che è evidente quando i triangoli piccoli sono sottomultipli esatti del triangolo grande ma che deve essere immaginata ed elaborata nel triangolo "anomalo".

Maestro - *prova a vedere su un'altra famiglia se valgono i numeri che avevi trovato*
15 - *io l'ho fatto con un'altra famiglia, coi triangoli isosceli*
1 - *sono isosceli perché hanno due metà uguali*
16 - *quattro piccoli isosceli*
Paolo - *prova a mettere otto isosceli*

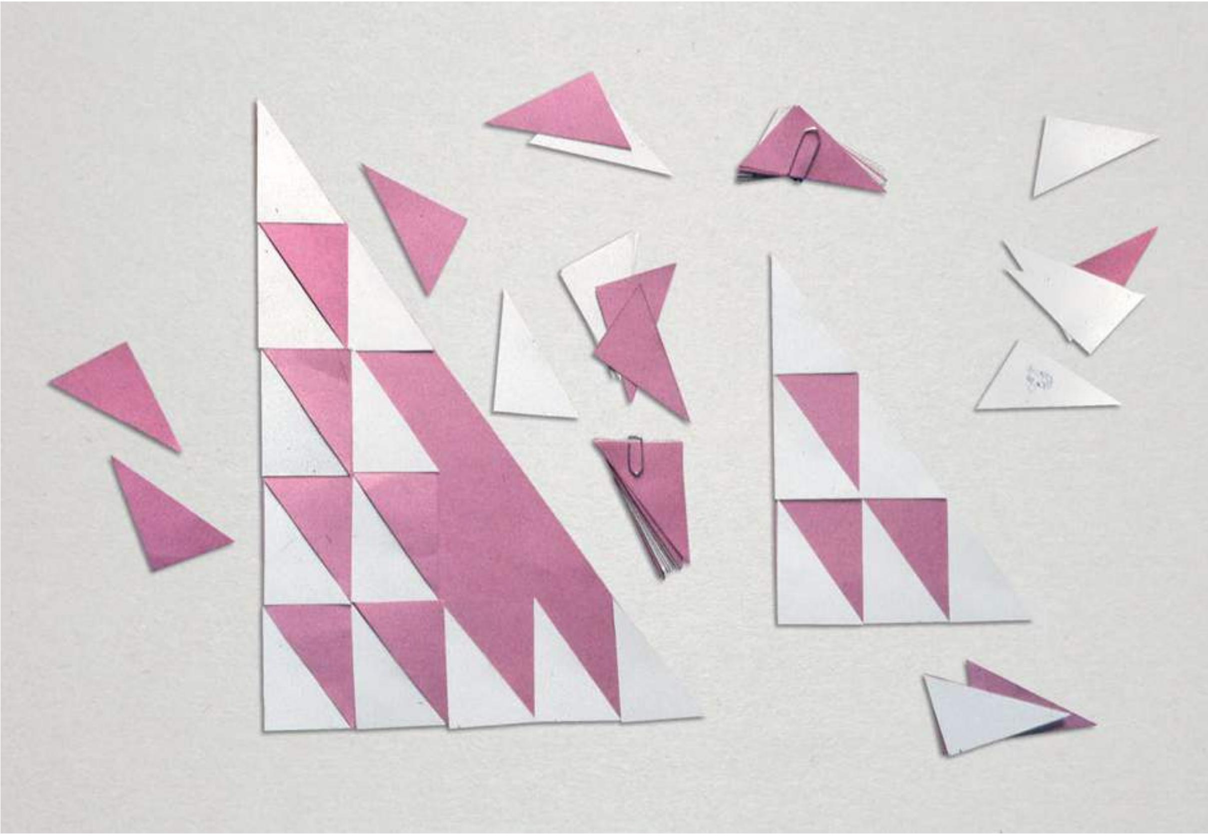


Fig. 66 - Quanti triangolini per riempire un triangolo grande?

17 - *1, 4 ,16, 25, 36, e credo di aver trovato una regola uguale a quella di Donata, ma un pò più grossa, per fare gli isosceli*
Maestro - (mostrando il triangolo "strano") *e quest'altro triangolo? Con quanti triangolini potreste ricoprirlo?*
Pablito - *abbiamo diversi problemi da risolvere, uno è quello dell'isoscele, e ce n'è ancora un'altro. Qui c'è un altro triangolo che non funziona come l'altro che si copre con 5 X 5 = 25 triangolini, ma non so per quale motivo, anche se è della stessa famiglia, non si copre bene..*
Provate a metterceli sopra e vediamo.

Ognuno pensa a come ricoprire il nuovo triangolo e, soprattutto, cerca di capire cosa c'è che non funziona. Si prendono i triangolini, si prova a riempire la figura.. ma non c'è niente da fare: o restano spazi vuoti o bisogna sovrapporre i triangolini.
Cercando le formule segrete, come dice Max, alcuni cominciano a capire il problema e tentano varie strategie di soluzione. Gli esempi e le parole sono confusi e non organizzati, ma è estremamente interessante cogliere, dietro di essi, il pensiero che prende forma in ciascun ragazzo, le diverse idee che vengono messe in gioco per risolvere la questione e, soprattutto, i differenti "modi di guardare" con cui ognuno interpreta la situazione che tutti hanno davanti agli occhi. Proviamo a seguire quindi i vari ragionamenti, notando come anche le frasi abbozzate si influenzino reciprocamente, come permettano l'emergere di nuove idee nella testa di un compagno, come lo sforzo cognitivo di ciascuno si accordi gradualmente con quello degli altri.

11 - (prova a mettere i triangoli sul triangolo "anomalo", alternando spazi pieni e vuoti) *così ne metto sei.*
16 - *ma non è della stessa famiglia, è della famiglia dei bucatini!*
1 - *mi sembra strano quel triangolo*
Paolo - *ma si può o non si può riempirlo di triangolini?*
- *non si può* (dopo diversi tentativi)
1 - *io li metterei tutti quanti negli angoli, come quando bisogna misurare! cioè se questa fosse la punta b, ci metterei la punta b del triangolino* (ma ovviamente non funziona)
16 - *cerchiamo le formule segrete*
1 - *non è in proporzione delle misure; se li è per esempio "3, 5 e 6 " di là può essere "2, 4 e 5", perché devono stare tutti in una stessa scala; magari quello invece di essere 3, 5, 6 è 3, 5, 8, perciò la punta è lunga ... no, no niente!*

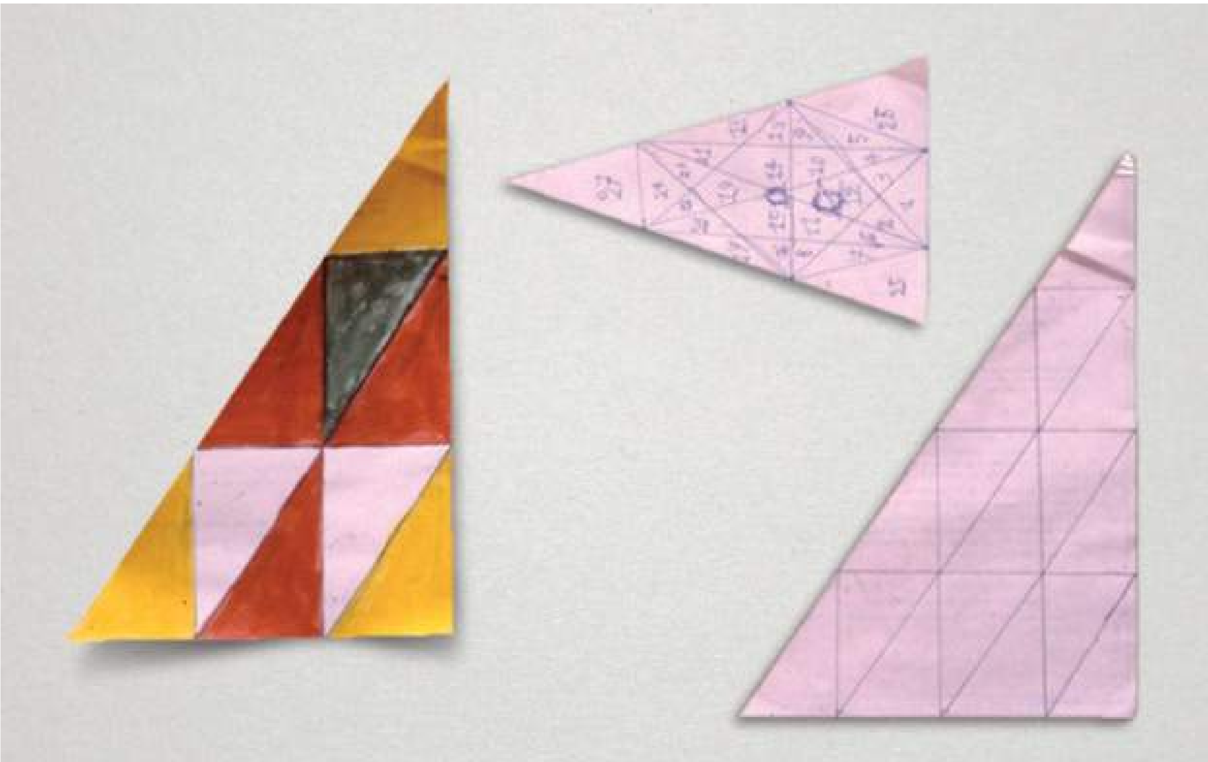
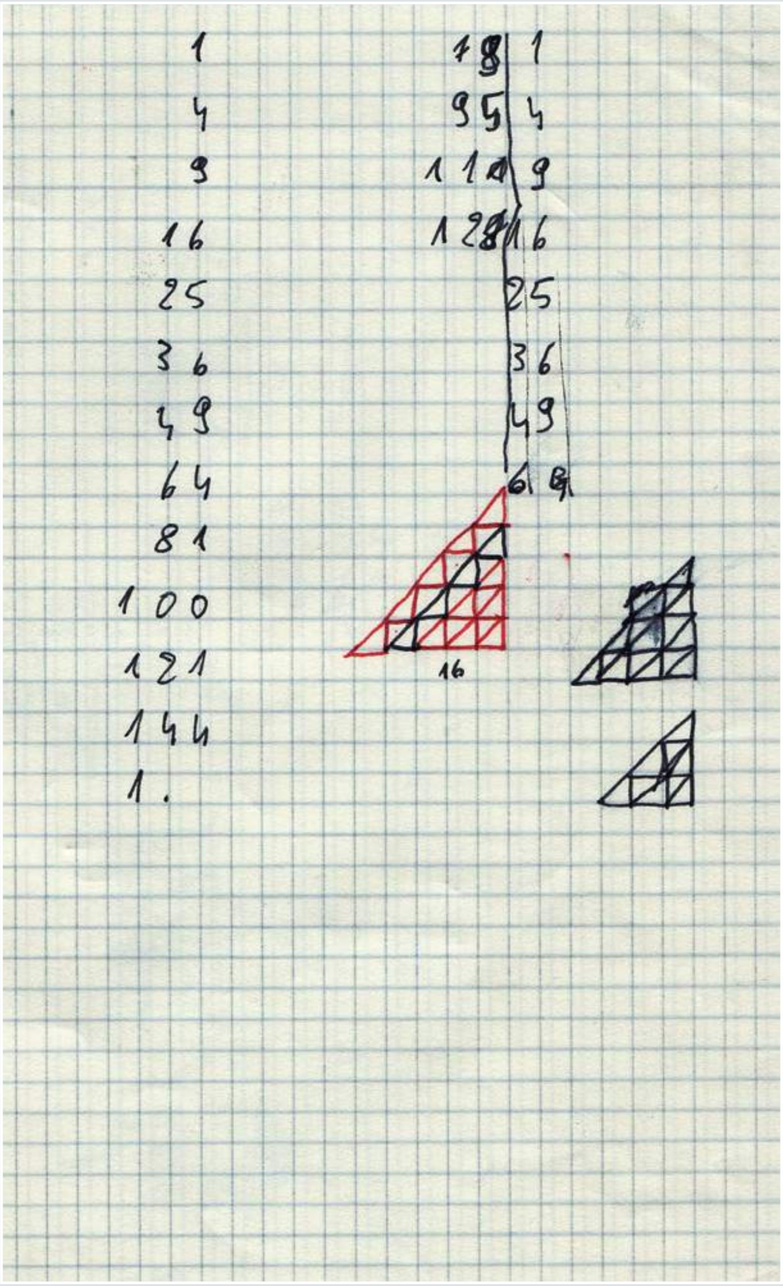
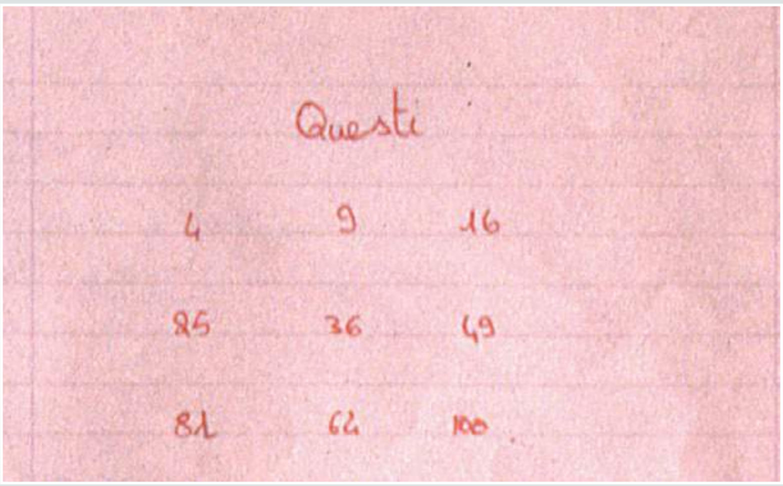


Fig. 67 - Il numero dei triangolini della base per il numero dei triangolini dell'altezza dà il numero dei triangolini che servono per ricoprire il triangolo grande.

1 - *se si accorcia la base di là, e la punta rimane sempre unita, cambia l'ampiezza dell'angolo? l'angolo diventa diverso?*
Se metto un triangolino piccolo così, facciamo che la base è una riga, e lo accorcio, l'angolo diventa diverso?





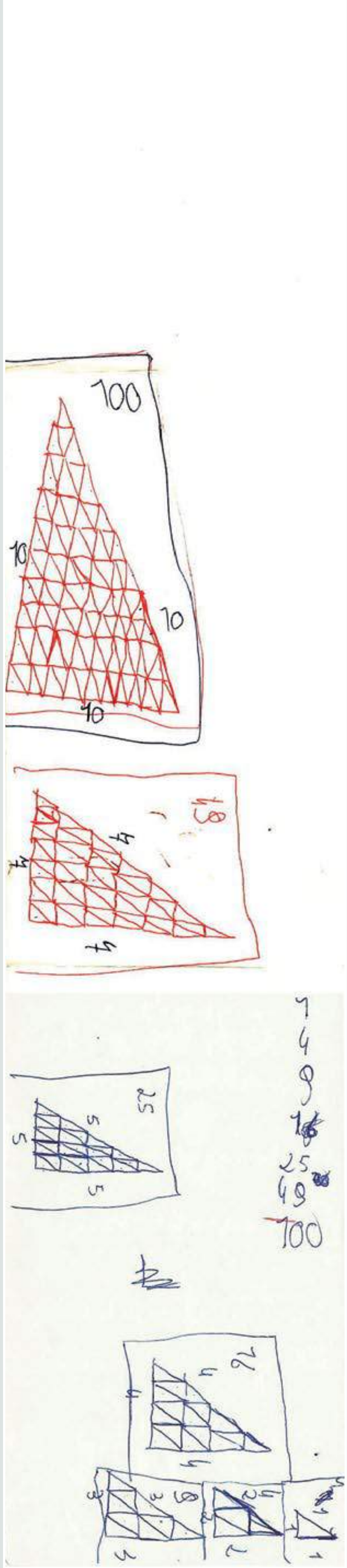


Fig. 68 - **69** - **70** - Calcoli e disegni per trovare la regola

Maria - *se lo accorci così tutti gli angoli possono rimanere uguali*
1 - *no, io intendo così, che la punta lì rimane bene... solo se i lati restano paralleli.*
Pablito - *stai dicendo che, se sovrapponi i triangolini, gli angoli sono uguali, ma non ti basta! Hai problemi con i lati?*
1 - *gli angoli vanno bene, solo che questo non è proporzionato ossia che questi due lati non sono giusti di lunghezza, solo che credo che se non sono giusti di lunghezza credo che in qualche modo l'angolo varia. Non me lo sono riuscito ancora a spiegare, dovrebbero essere figure come queste ma un pò più alte. Però se non sono giusti i lati non dovrebbero essere giusti neanche gli angoli!*
18 - *quella striscia rosa che rimane non ci dovrebbe stare, oppure i triangoli piccoli dovrebbero essere leggermente più grandi*
1 - *ho capito tutto.*

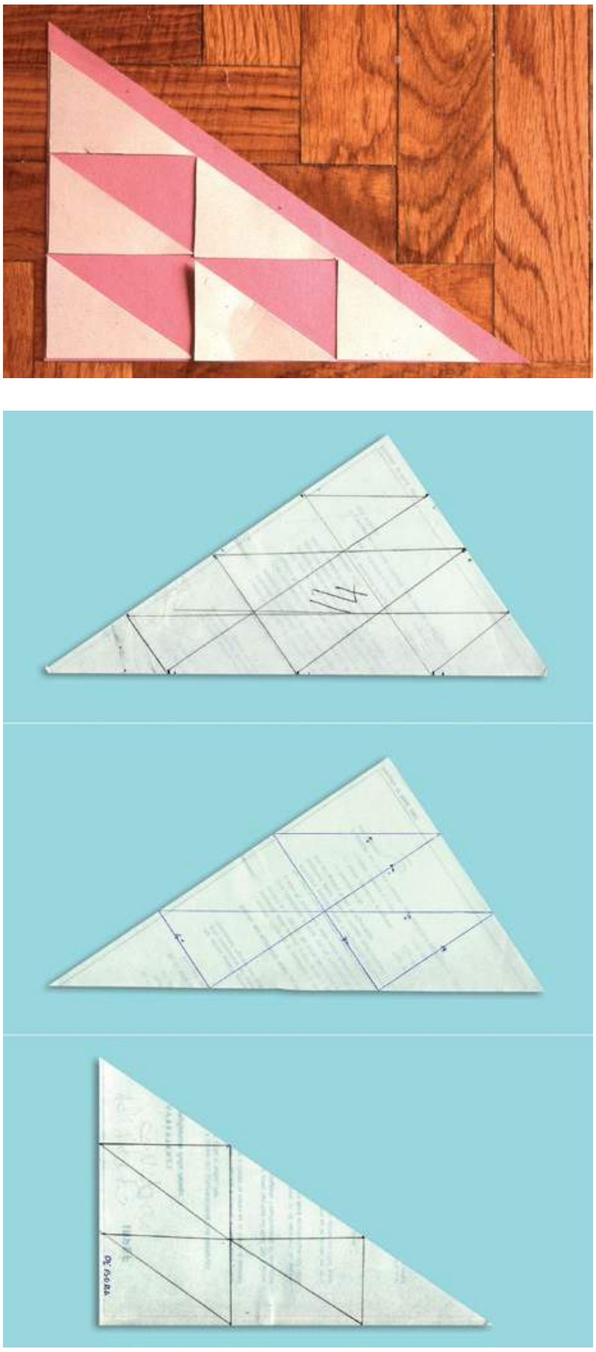


Fig. 71 - **72** - **73** - **74** - Si divide la base e l'altezza nello stesso numero di parti

- *se il triangolo grosso fosse più grande...*
14 - *per me non si può fare, perché come ha detto Marco, ci deve essere un errore in uno dei lati: prima erano messi tutti vicini. Allora c'è qualcosa nei lati, in quello corto e in quello dritto, i triangolini dovrebbero essere o tutti più piccoli o tutti più grandi*
11 e 17 - *Non si può fare, perché i triangolini non sono della grandezza giusta per metterli bene*
Maria - *ma sono triangolini della stessa famiglia?*
17 - *sono della stessa famiglia ma non della stessa grandezza*

Donata riprende il pensiero di Marco (che intanto sostiene di aver capito tutto per suo conto) e dà indicazioni più precise su come dovrebbero essere i triangolini.
Evita la confusione tra angoli e lunghezza dei lati e concentra la sua attenzione sul fatto che basterebbe tagliare con le forbici un pezzo di tutti i triangolini per farli entrare su quello grande senza sovrapposizioni.

Marco aveva dato delle terne di numeri a caso, giusto per farsi capire, ma quei numeri rappresentano per lui quella idea di proporzionalità che gradualmente sta prendendo forma nella sua mente.
D'altra parte non riesce ancora a separare concettualmente la relazione tra la forma e la grandezza dei triangoli piccoli e grandi, mediata dalla lunghezza proporzionale dei loro lati.

Intanto anche Mayer e Luca stanno portando la loro attenzione sulla grandezza dei triangolini, e Luca dice chiaramente che essere della stessa famiglia non è sufficiente per realizzare la copertura del triangolo grande. Max ricorda la "regola dei quadrati", cioè dei numeri che, nel lavoro precedente, definivano il numero dei triangolini necessari per costruire un triangolo più grande e della stessa famiglia.

Per lui, l'idea di proporzionalità tra le lunghezze dei lati è ben chiara, e per ricoprire il triangolo grande bisogna soltanto trovare il giusto rapporto tra le lunghezze dei suoi lati e quella dei triangoli che dovrebbero ricoprirlo. Mentre esprime la sua intuizione matematica i compagni lo ascoltano leggermente sbalorditi e chiedono spiegazioni:

16 - *secondo me quel triangolo lì viene dal quadrato di un numero con la virgola. Per me con questi triangolini non si può fare però con pezzi di questi triangoli si. Comunque per ottenere quanti triangolini ci sono dentro secondo me bisogna fare il quadrato di un numero con la virgola*
Maria - *e in questo caso, che numero con la virgola proveresti a dire*
16 - *tre virgola qualcosa*
1 - *non ho capito, virgola qualcosa di che?*
16 - *ho detto che per avere il triangolo coperto bisogna fare il quadrato*
17 - *quale quadrato, e perché poi?*
16 - *il nove sono tre al quadrato, siccome ne manca una striscia, saranno tre virgola qualcosa.*

Lasciando agli altri il tempo per capire cosa ha in testa Max, si continua a lavorare e si vede bene che, comunque si mettano, i triangolini a disposizione non potranno mai ricoprire il triangolo "anomalo": c'è chi comincia a ricoprire dalla punta, chi da un lato, chi dalla base... ma nessuno ci riesce. Bisogna necessariamente ritagliare altri triangoli, ma come? Pablito propone di tagliarli in modo che 9 bastino a riempire il triangolo grande.
Qualcuno, soddisfatto della possibile soluzione, la trova facile ma, in realtà, tanto facile non è. Bisogna impegnarsi a trovare la regola per ingrandire o rimpicciolire i triangolini in modo che siano uguali, che siano della stessa famiglia e che solo nove possano riempire il triangolo grande.
Diego si mostra subito molto deciso nella sua idea dividere in tre tutti i lati, unire i punti trovati e costruire così i triangoli all'interno, altri si avvicinano gradualmente alla soluzione dopo parecchi tentativi, disegni e cancellature.
Marco non sa portare avanti la sua idea di proporzionalità e ancora si interroga sulla relazione tra angoli e lati del triangolo. L'intuizione iniziale non è sostenuta da una formalizzazione teorica per cui, almeno per adesso, risolve il problema come Diego, lavorando concretamente con carta e matita e facendo i suoi vari tentativi. Max usa le sue conoscenze sulla misura delle aree... e trova l'area dei triangolino ma si scontra subito con un problema che "è la prima volta che gli capita".

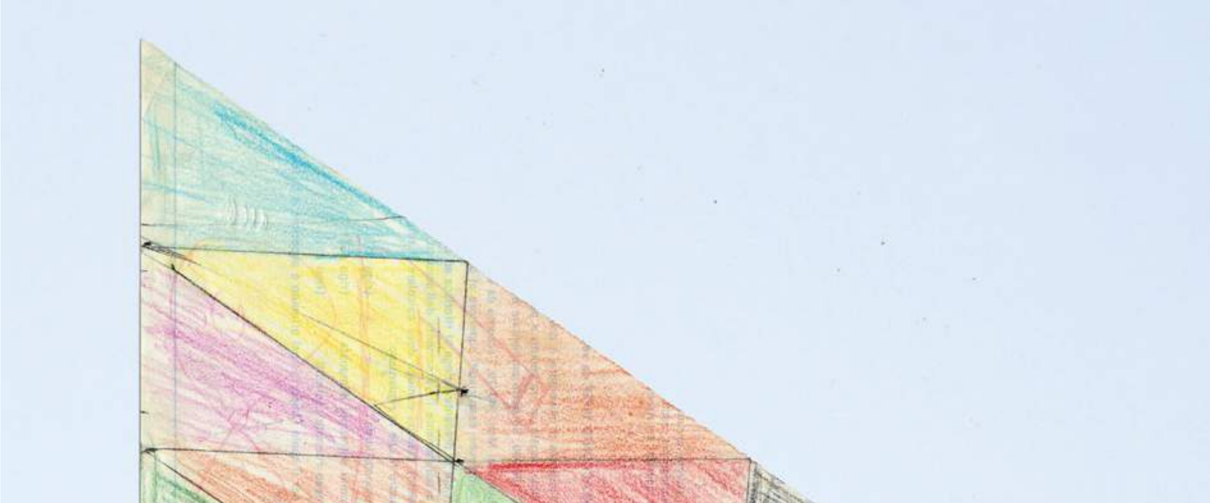


Fig. 75 - Si tagliano o si disegnano i triangolini in modo che 9 riempiano il triangolo strano

5 - (confrontando il triangolo riempito bene e quello "strano"): *io lo so perché non vanno bene, perché mentre questi piccolini e questo qui c'è uno spazio, diciamo, paro, perché mettendo qui tutti i triangolini arrivano a stare dritti sulla punta, questo qui non viene. Ossia facciamo conto che questo è paro, questo non è più grande di un triangolino, bensì di pochissimo, e quindi se questo va paro, quest'altro è impossibile che va paro*
12 - *basta farle i triangolini un pò più grandi. Facciamoli e poi vediamo se quelli che sono venuti sono della stessa famiglia*
1 - *ma se si accorciano i lati, resta della stessa famiglia? se lo faccio così non posso scorciare i lati senza mantenere l'angolo*
Pablito - *Se questi non vi vanno bene, fate altri triangoli, più grandi o più piccoli, sempre della stessa famiglia, tagliateli o disegnateli in modo che nove riempiano questo triangolo*
5 - *bisognerebbe ingrandirli, si ingrandiscono*
Pablito - *ma come? prova a disegnarli*
- *è facile*
12 - *se divido i tre lati del triangolo in tre parti mi viene paro*
3 - *metto un triangolo così che stanno dritti, e li metto: uno due e tre. Calcolando quello sui bordi, poi gli altri vengono giusti calcolando preciso, anche in mezzo, vengono nove triangoli* (ci devono essere tre triangoli giusti per ogni lato)
1 - *ma bisogna dire quello che bisogna fare? io l'idea ce l'ho*
Maestro - *allora lo volete fare senza dirvi le idee prima?*
1 - *è meglio, se no uno non risolve nessun problema!*
5 - *basta dividere per tre*
18 - (aveva prima fatto cinque triangoli a caso) *ho diviso il triangolo in tre: ho diviso questo lato in tre poi ho fatto delle righe dritte fino all'altro lato... veramente non sono molto dritte... Sono dritte rispetto al triangolo. La seconda riga dritta l'ho divisa per due* (come nel modello per terra). *Poi ho adoperato questo punto, e l'altra riga l'ho divisa per tre*
17 - *divido un lato in tre* (comincia dal lato più lungo)
16 - *lo voglio dividere in nove parti. Trovo l'area del triangolo* (base per altezza diviso due) *trovo l'area di un triangolino facendo l'area che ho trovato diviso nove. Ma come faccio a trovare i lati? Eppure è tutto giusto. Ho nove triangoli uguali. Ma se divido per nove l'area, che erano centimetri quadrati, restano centimetri quadrati. È la prima volta che mi succede, che divido l'area per un numero, e resta un'area.*

19. Ingrandire e impicciolire triangoli

Per affrontare da un altro punto di vista gli aspetti di proporzionalità tra le misure dei lati e verificare attraverso un lavoro individuale quali ragazzi arrivano alla soluzione, si distribuiscono vari fogli su cui è stato disegnato un triangolo. La richiesta è di disegnare, all'interno o all'esterno del triangolo dato, altri triangoli della stessa famiglia, o di ingrandire quello dato in modo da avere sempre triangoli della stessa famiglia.
È possibile trovare una regola?
Il primo sistema, "inventato" da molti, è quello di allungare tutti i lati di uno stesso numero di centimetri; ma il terzo lato si allunga in modo diverso.

10 - *per esempio io ho preso una misura, un centimetro, o due, e poi lo ho fatto pure da questa parte. Per esempio da questa parte è un centimetro, da quest'altra pure un centimetro e poi ho tirato la linea*
1 - *guarda qua, questi piccoli dentro, va bene, ma questi qua.... non riesco a farlo: questo che era di due lo ho fatto di cinque, questo che era di quattro lo ho fatto di sei, questo che era di cinque dovrebbe diventare di sette; ma di sette non ci diventa*

Maria - *cosa hai fatto, questo lo hai raddoppiato?*
1 - *no, ho aggiunto due centimetri*
Maria - *state attenti però a vedere bene se poi sono della stessa famiglia*
5 - *mannaggia, qui c'è qualcosa che non va*
11 - *io ho fatto un prolungamento di un centimetro*
Maria - *aumenti di un centimetro tutti i lati?*
11 - *sì*
3 - *va stupendamente, solo non capisco una cosa: guarda ho aggiunto tre da questo, tre da questo e tre da questo, e non torna!*

Altri provano altri sistemi e Diego trova rapidamente i suoi triangoli interni raddoppiando o dividendo a metà i lati del triangolo dato. Anche Luca comincia col raddoppiare un lato e poi... finisce ad occhio. Gli altri, gradualmente si accorgono che aggiungere una stessa quantità alla lunghezza dei lati non funziona ma, invece di cambiare la regola, propongono piccoli aggiustamenti in modo da far "venir bene" comunque i loro triangoli. Il controllo è ancora sostanzialmente "ad occhio" ma il maestro ricorda ai ragazzi il modo sicuro per controllare se i triangoli sono della stessa famiglia. Alla carta, matita e righelli si aggiungono le forbici, i ragazzi ritagliano i loro triangoli e cominciano a vedere se gli angoli dei loro nuovi triangoli si sovrappongono o no a quelli del triangolo dato.

Fig. 76 - Anche disegnare triangolini può diventare un gioco

Maria - *vedo il triangolo disegnato, ma per ingrandirlo di questo pezzetto qui, come hai fatto? Cosa hai aggiunto, oppure, cosa hai misurato?*
12 - *sono quattro centimetri e mezzo*
Maria - *e cosa hai misurato?*
12 - *ogni lato, l'ho raddoppiato e poi l'ho diviso*
17 - *i miei sono della stessa specie!*
Maria - *ma come le hai prese le misure di questi lati?*
17 - *veramente questo qui sarebbe il doppio di questo qua, e questi qui li ho fatti a casaccio!*

Certamente l'aspetto percettivo è importante ma vediamo anche come in certi casi proprio la percezione impedisce di generalizzare le procedure e di cercare le regole.
E le parole usate per spiegarsi spesso non descrivono affatto il lavoro fatto.

Fig. 77 - I disegni alla lavagna servono per visualizzare le procedure di soluzione

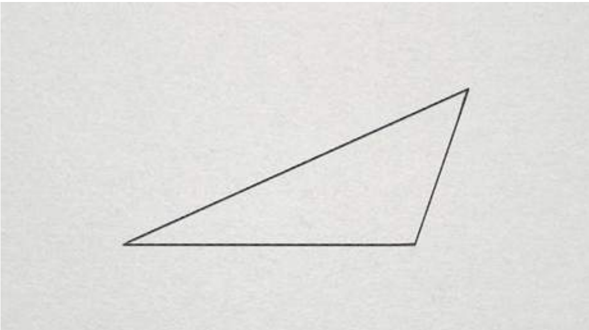


Fig. 78 - Uno dei triangoli "modello"

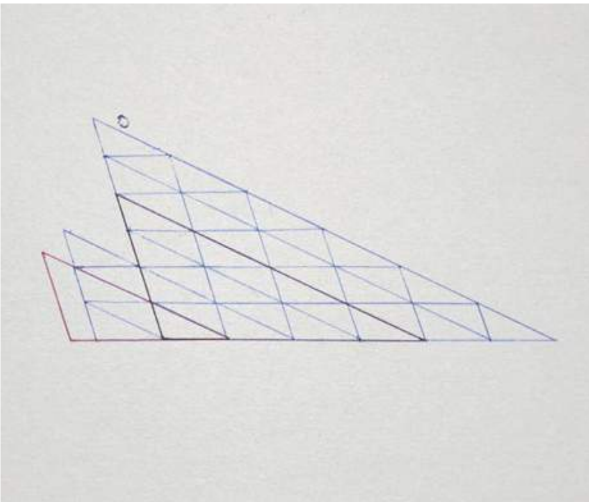


Fig. 79 - Verso i triangoli simili

6 - *ho fatto così: nel primo in questo grande, ho raddoppiato tutti e tre i lati*
Maria - *tutti e tre?*
6 - *sì, tutti e tre. Invece qua, l'ho raddoppiato così: era a tre, e l'ho raddoppiato a sei, questo era di quattro e l'ho diminuito di tre, questo è di cinque e l'ho raddoppiato di un centimetro. Cioè sei*
Maria - *ma perché uno lo raddoppi e uno lo diminuisci?*
6 - *perché se no mi dovrebbe venire bene no?*
1 - *ti faccio vedere pure gli altri che ho fatto, è sicuro che vengono bene, poi faccio una cosa, divido pure gli altri due...*

Alcuni si stanno preparando a fare il grande passo verso la scoperta della regola

16 - *posso triplicarlo, raddoppiarlo, quadruplicarlo, dimezzarlo, è la stessa cosa!*
17- *devo tutto raddoppiare, questo è cinque e faccio qua dieci, raddoppio tutto insomma*
16 - *se Debora ci avesse il foglio più grande potrebbe continuare per sempre*
Maria - è bellissimo il tuo lavoro, Debora, hai fatto una cosa bellissima: hai raddoppiato, ma in tutte le direzioni, non hai fatto come Diego che ha ingrandito o impicciolito il suo triangolo; tu hai proprio coperto di triangoli tutto il foglio
17 - *a quelli che hanno aggiunto gli stessi centimetri dico: questi sono della stessa famiglia, eppure, il proseguimento di questo lato qui, è più corto del proseguimento di questo lato che arriva al vertice del triangolo più grosso, quindi se aggiungi i centimetri uguali, i triangoli non sono più uguali*
Pablito - *ripetiamo: questi due triangoli sono della stessa famiglia, ma i loro lati differiscono per un pezzetto diverso. Siete tutti d'accordo che questo pezzetto è diverso?*

Il passaggio cognitivo dall'aumento (additivo) alla proporzionalità (moltiplicativa) è difficile da conquistare, nonostante i suggerimenti operativi che vengono dati contestualmente e nonostante i risultati ottenuti da alcuni compagni.
La regola de "il doppio o la metà" che alcuni generalizzano raddoppiando, triplicando o quintuplicando le misure dei tre lati comincia ad essere condivisa ma ancora una volta l'occhio pone dei problemi:

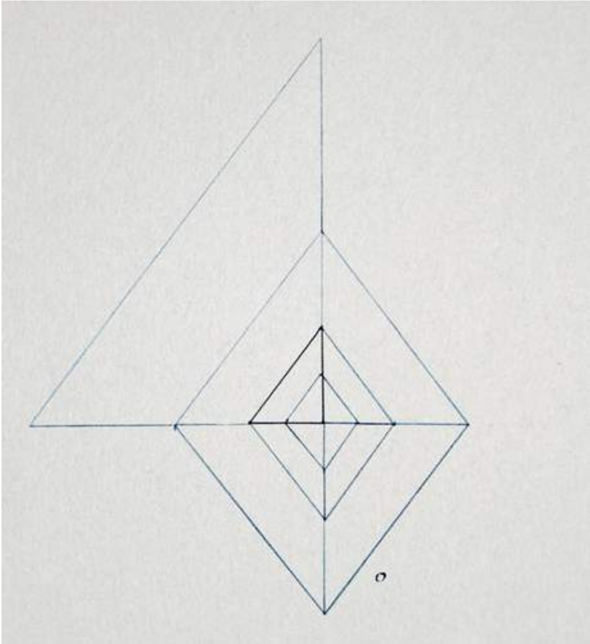


Fig. 80 - Ingrandire i triangoli (Debora)

5 - *io posso dire una cosa su questo? io faccio una ipotesi, non so se è giusto, che questo triangolo, forse, non è di questa famiglia, perchè per me le basi dovrebbero essere parallele, ossia che la distanza tra le basi qui misura 11 e qui 7 ½, quindi per essere della stessa famiglia dovrebbero misurare tutti e due o 11 o 7 ½*
Maria - *ma secondo te, quelle due righe sono parallele o no?*
1 - *io avrei un modo per provarlo, se sono parallele: misurerei la distanza* (tra il lato del triangolo grande e quello del triangolo piccolo) *e manco importa se è 7 ½ o una cosa del genere; comunque traccerei una linea e dovrebbe venire 7 ½ anche qua, se viene otto, vuoi dire che il lato si allarga, non va cosi ma va così* (gesti come per aggiustare la linea spingendola per farla diventare parallela)
Maestro - *se la distanza resta uguale vuoi dire che erano parallele? Problema: che cosa significa parallelo?*
- che vanno sempre dritte nello stesso modo
- che non si incrociano mai.

20. La regola di costruzione dei triangoli

Il conflitto tra le opinioni ad occhio e le regole matematiche stimola una discussione in cui possiamo osservare le strategie di argomentazione che i ragazzi usano per convincere i compagni. Qui Max è molto sicuro della sua regola e discute con Marco che ancora non sembra convinto della procedura corretta. Dimostra con la riga e la penna che la regola delle aggiunte non funziona, riprende proprio il

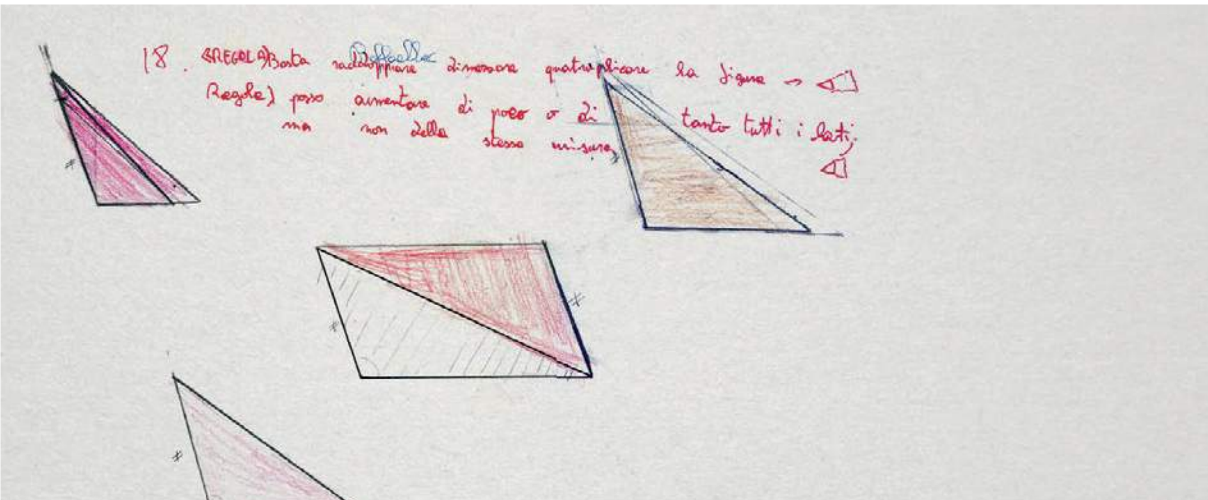


Fig. 81 - Verso la regola che non è ancora perfetta

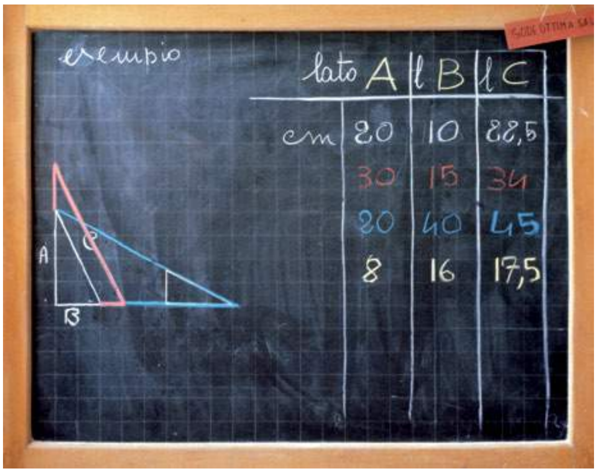


Fig. 82 - **83** - La lavagna aiuta a visualizzare le figure e a ragionare con i numeri

discorso sul parallelismo che Marco aveva appena sviluppato e... pretende che si facciano le misure giuste, perchè anche lo sgarro di due millimetri è importante.

16 - *per me non è vera la regola delle aggiunte perché va preso una parte, mettiamo la metà, di questa linea e l'aggiungo qui, una metà di questa linea e l'aggiungo qui. Per venire esatto dovrebbe misurare questo 9 e questo 4 ½; invece col tuo sistema misura 5, e viene sballato, almeno mi sembra.*
- *gli viene quasi giusto*
16 - *quasi; dammi un momento la riga e la penna che ti mostro. Ora io traccio una riga e vedremo se è parallelo, guarda Marco*
- *sono parallele?*
1 - *se le hai tracciate bene dovrebbero essere parallele*
16 - *dovrebbero. Ora usiamo il metodo che hai fatto tu. Io aggiungo ad esempio 7 centimetri qui, giusto? e li dovrei aggiungere 7 anche a questo altro lato, e poi misurare la distanza con il terzo lato*
Maria - *sta facendo quello che avevi detto tu per provare se le due righe sono parallele*
16 - *e ora dovrei mettere, se è parallelo, 5 cm esatti, giusto?*
1 - *ed è 5 cm esatti*
16 - *e non è 5 cm esatti*
1 - *di quanti millimetri sgarra?*
- *di uno*
16 - *di due*
- *capirai, per due millimetri,* (a Max) *sei pignolo eh!*
16 - *sono pignolo perché è sbagliato, se continua diventa molto più grande, è sbagliato.*

Ognuno lavora a suo modo, sviluppando le proprie idee, confrontandole alla fine con quelle degli altri e argomentando il proprio "metodo":

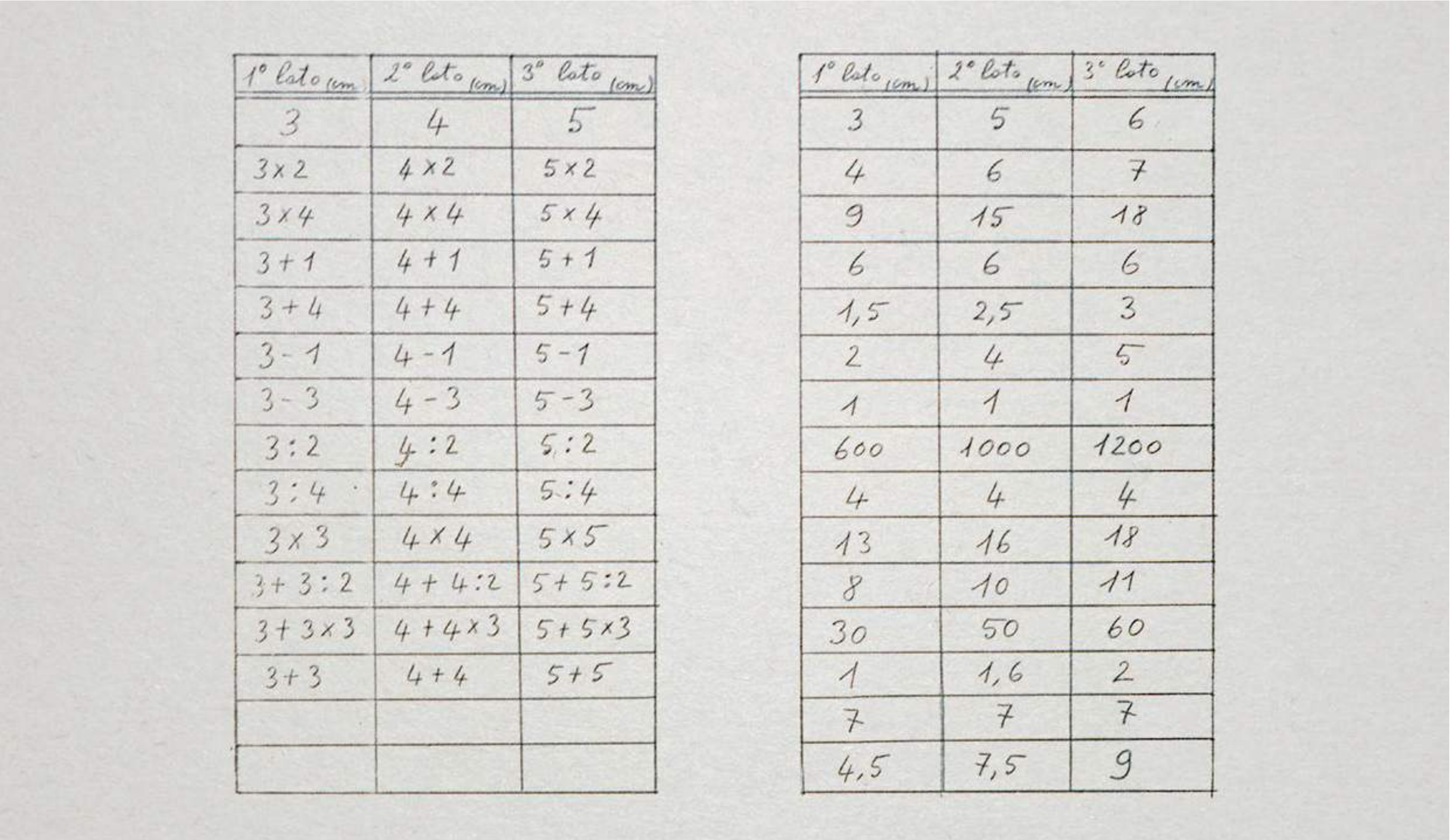
5 - *io ho fatto un metodo quasi sicurissimo, ho diviso per esempio tutti i lati in quattro, e poi ho unito i vari punti, e ho fatto le linee e mi sono risultati tutti dentro degli altri triangolini della stessa famiglia, poi per farlo più grande ho preso l'angolo retto che stava qui, e poi ho visto l'angolatura della pendenza di questa linea, e poi l'ho riportata*
Maestro - *come hai fatto a vedere l'angolatura della pendenza della linea?*
5 - *cosi, col goniometro*
Maestro - *quindi tu hai misurato l'angolo lassù.*

Nella descrizione della attività, accompagnata dai gesti per mostrare e far vedere agli altri quello che è successo, le frasi dette per spiegarsi perdono il loro significato letterale. Così non si capisce se i ragazzi sono guidati dalle parole (che non corrispondono ai gesti) o dai gesti (che non corrispondono alle parole). Ecco per esempio come la parola "raddoppiare", che sembrava non comportare alcuna ambiguità, viene stravolta nel suo significato (ed a questo si aggiungono probabili errori di calcolo) mentre altri la usano correttamente:

14 - *io ho trovato, diciamo, una regola possibile per la mia figura; ossia, ho misurato i lati della figura, dopo erano 3, 4, 5, allora li ho raddoppiati, raddoppiati e raddoppiati, e dopo Pablito ha detto che se poi magari li triplicavo veniva la stessa figura, e io ho provato raddoppiando la prima volta di 6, di 8, di 10, e poi le altre volte, cosi. Ma ho visto che, dopo, quello di quattro cresceva veloce, perché da 160 è arrivato a 320, quello altro invece è andato lento perché quando il primo lato sta a 320, lui sta a 240, eppure manca solo un centimetro di differenza*
Maria - *allora hai un lato che va di corsa e un altro che va piano, e questa differenza di un centimetro poi diventa una differenza enorme*
1 - *perché c'è l'angolazione laggiù, che si è aperta*
18 - *io, quando il maestro ci ha posto il problema, non avevo capito, poi ho raddoppiato i lati*
Maria - *e come ti è venuto in mente di raddoppiare i lati*
18 - *ho visto che le lunghezze venivano bene*
15 - *io invece ho fatto tutte le misure e poi dopo ho raddoppiato.*

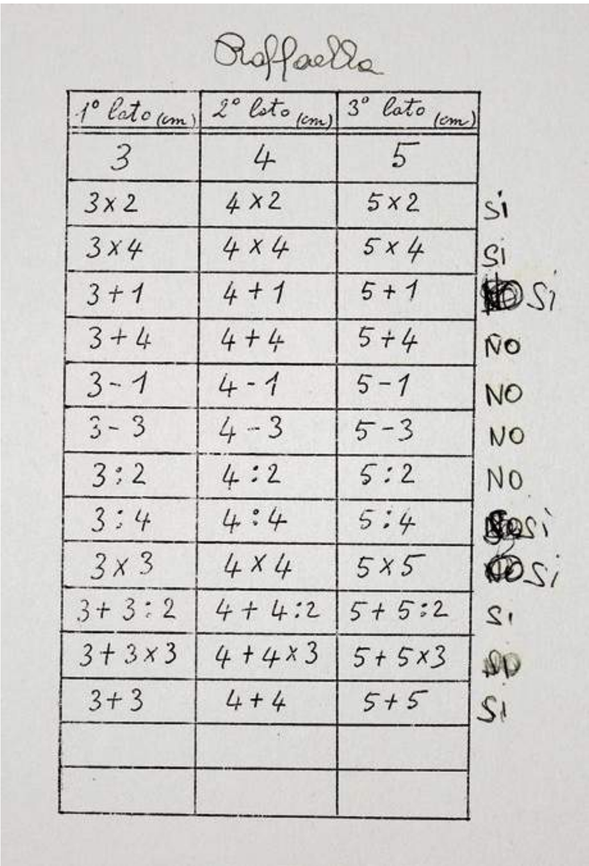
L'invito a riportare le misure dei lati in una tabella dovrebbe permettere di visualizzare meglio la relazione tra i numeri, ma non tutti i ragazzi sembrano ancora pronti per questo passaggio. Si distribuiscono allora due tabelle, su cui sono riportate le misure dei lati di triangoli, mescolando insieme criteri di somma e sottrazione (aggiunta o sottrazione di varie quantità ai lati del triangolo base) e criteri di proporzionalità (dividendo o moltiplicando i lati per quantità uguali o diverse). I ragazzi dovevano indicare sulla tabella quali secondo loro erano triangoli della stessa famiglia e quali non lo erano.

Maria - *ti ricordi che prima, mettendo i numeri scritti,le regole si vedevano meglio? ti devi abituare a scriverli, i numeri: scrivi, per i triangoli che ti vanno bene, le misure di un lato, dell'altro lato e dell'altro lato, e ti segni le misure*
14 - *come, come?*
Maria - *scrivi le misure per ogni lato del tuo triangolo, poi trova altri triangoli che ti vanno certamente bene, e scrivi sotto, in ordine le misure dei lati: forse ti viene qualche idea*
2 - *va piuttosto male*
Maria - *possiamo fare insieme, alla lavagna, una tabella con le misure di tutti i lati dei triangoli che possono ricoprire il triangolo grande, e vediamo che numeri vengono*
17 - *io ho trovato la prima regola: basta raddoppiare , dimezzare, quadruplicare la figura*
Maestro - *che vuol dire la figura?*
17 - *la figura sarebbe questa qua*
Maestro - *appunto, come hai fatto a dimezzarla o a raddoppiarla?*
17 - *la prendo due volte*
Maria - *prova a dirlo bene con parole: che cosa fai esattamente*



1° lato (cm)	2° lato (cm)	3° lato (cm)
3	4	5
3 x 2	4 x 2	5 x 2
3 x 4	4 x 4	5 x 4
3 + 1	4 + 1	5 + 1
3 + 4	4 + 4	5 + 4
3 - 1	4 - 1	5 - 1
3 - 3	4 - 3	5 - 3
3 : 2	4 : 2	5 : 2
3 : 4	4 : 4	5 : 4
3 x 3	4 x 4	5 x 5
3 + 3 : 2	4 + 4 : 2	5 + 5 : 2
3 + 3 x 3	4 + 4 x 3	5 + 5 x 3
3 + 3	4 + 4	5 + 5

1° lato (cm)	2° lato (cm)	3° lato (cm)
3	5	6
4	6	7
9	15	18
6	6	6
1,5	2,5	3
2	4	5
1	1	1
600	1000	1200
4	4	4
13	16	18
8	10	11
30	50	60
1	1,6	2
7	7	7
4,5	7,5	9



Raffaella

1° lato (cm)	2° lato (cm)	3° lato (cm)	
3	4	5	
3 x 2	4 x 2	5 x 2	sì
3 x 4	4 x 4	5 x 4	sì
3 + 1	4 + 1	5 + 1	sì
3 + 4	4 + 4	5 + 4	no
3 - 1	4 - 1	5 - 1	NO
3 - 3	4 - 3	5 - 3	NO
3 : 2	4 : 2	5 : 2	NO
3 : 4	4 : 4	5 : 4	sì
3 x 3	4 x 4	5 x 5	sì
3 + 3 : 2	4 + 4 : 2	5 + 5 : 2	sì
3 + 3 x 3	4 + 4 x 3	5 + 5 x 3	[illegible]
3 + 3	4 + 4	5 + 5	sì

17 - *prima misuro un lato di una figura, poi lo raddoppio, da 5 diventa 10, e lo faccio per questi altri*
Maria - *quindi raddoppi le lunghezze dei lati.*

Per concludere questa parte del lavoro, distribuiamo ai ragazzi un foglio su cui quattro possibilità di costruzione di triangoli sono disegnate in modo che non sia facilissimo, ad occhio, individuare i triangoli simili da quelli che non lo sono.
Ovviamente la richiesta è di riconoscere le costruzioni giuste e di spiegare perchè alcune non sono corrette.
Sembra che le idee si siano abbastanza chiarite e le regole sintetizzate tutti insieme in modo chiaro e condiviso rappresentano un buon punto di riferimento.

Fig. 84 - Le tabelle per individuare i triangoli simili
Fig. 85 - Un esempio di lavoro svolto

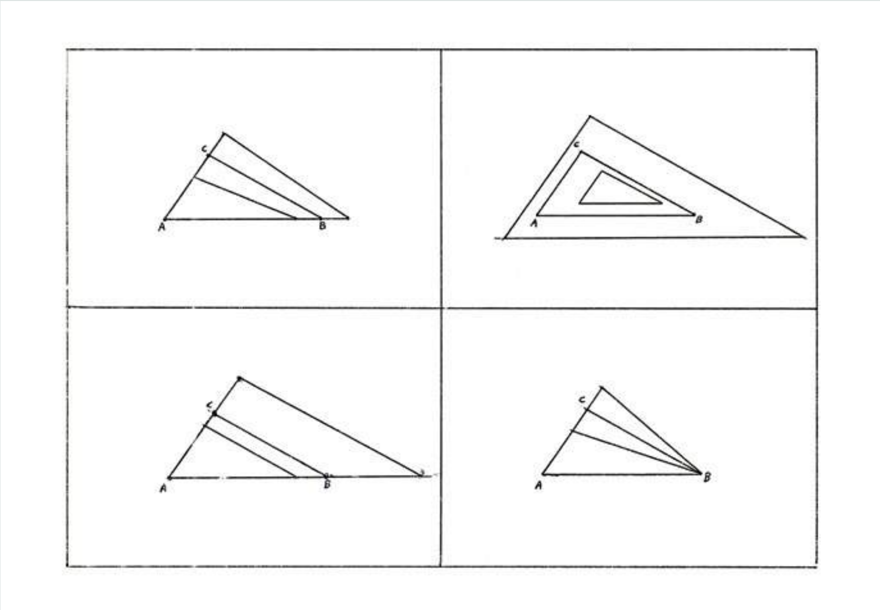


Fig. 86 - Quale di questi disegni rappresenta la costruzione di triangoli simili (della stessa famiglia)?

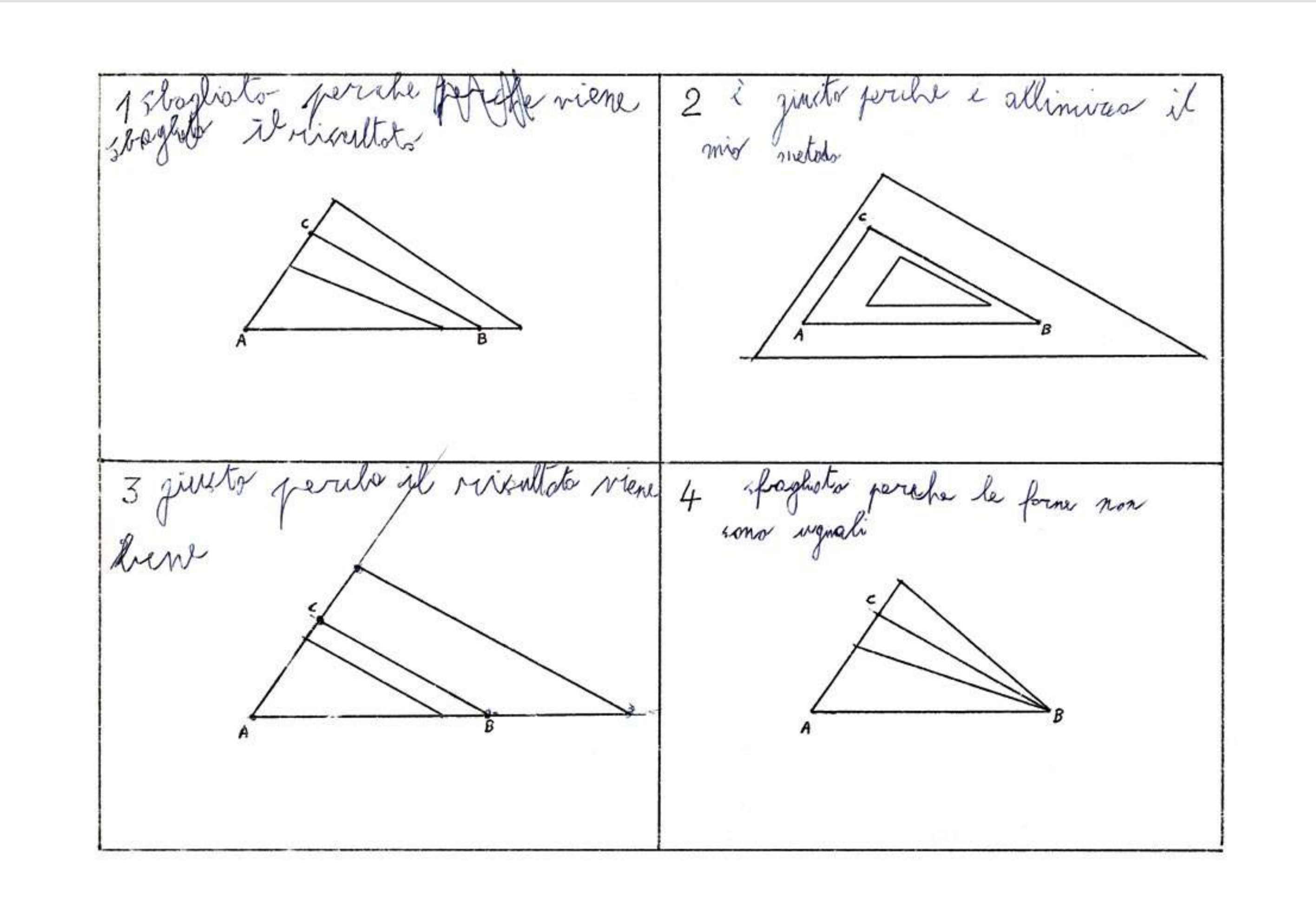


Fig 87 - Un esempio di lavoro

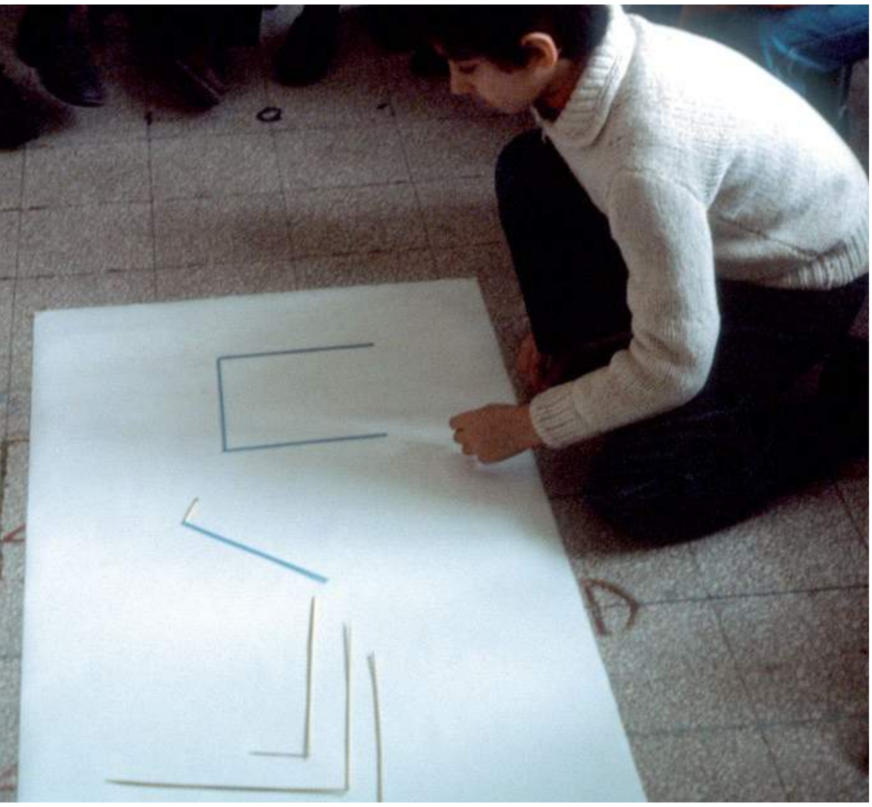
21. Angoli

> Si definisce angolo la porzione di piano compresa tra due semirette aventi la stessa origine. In realtà due semirette con la stessa origine dividono un piano in due parti (e quindi danno origine correttamente non ad un angolo bensì a due): quella ricompresa tra le due semirette che determina un angolo convesso e ciò che "resta al di fuori" che è un angolo concavo
>
> **(Enciclopedia Treccani)**

I ragazzi parlano in maniera efficace di "angolazione", di "pendenza"... ma al maestro sembra opportuno lavorare in modo specifico sul concetto geometrico di angolo. In ogni caso, è interessante conoscere quali idee, quali immagini e quali gesti vengono associati a questa parola che assai spesso, nel linguaggio comune, indica qualcosa che angolo non è, almeno in senso rigorosamente geometrico. Quindi sul nostro foglio - palcoscenico compaiono cannucce, stecche e stecchini di diverse lunghezze e spessori, variamente colorati. I ragazzi, seduti tutti intorno, cercano di capire cosa dovranno fare e quali compiti dovranno eseguire. Come spesso accade, viene scelto un bambino esecutore e un bambino controllore, che dovrà valutare e criticare l'operato del compagno. Il lavoro si avvia, e all'inizio il maestro cerca di "imbrogliare" i bambini chiedendo loro di comporre angoli uguali usando stecchi di lunghezza diversa; ma pochissimi cadono nel tranello. Insieme ai gesti cominciano le discussioni e le critiche ma assai presto si giunge ad un punto cruciale, quando il maestro chiede di comporre con gli stecchini l'angolo più grande e l'angolo più piccolo possibile.

Fig. 88 - Costruzione di angoli con stecchi e stecchini

Maestro - *a Debora chiedo: prendi quello che ti serve di queste cannucce, stecchini, spiedini, e fai un angolo su questo foglio che abbiamo in mezzo*
17 - *angolo come? si possono spezzare gli stecchi?*
Paolo - *no, non si possono spezzare*
4 - *metto gli stecchini ad angolo*
Maestro - *ti sta bene quello che lei ha fatto?*
2 - *si, veramente si potrebbe fare anche in un altro modo, ma va bene*
11 - *ma lei li ha voluti fare così*
Maestro - *Diego, con questi due stecchini fai un angolo uguale a quello che ha fatto Debora. Controllore, ha fatto bene Diego a fare l'angolo uguale a quello di Debora?*
18 - *no*
Paolo - *allora tu prova a far vedere come faresti a fare un angolo come quello di Debora*
18 - *questo qua deve essere più piegato*
Maestro - *Dibi, fai due angoli con questi tre stecchini lunghi. E tu, Andrea, fai con questi due stecchini corti la metà dell'angolo fatto da Dibi*
- *l'angolo la metà di uno di quelli?*
10 - *ma come la metà!*
Maestro - *ora Massimo fa un angolo grande come quello di Andrea* (gli dà gli stecchini lunghi)*; Luca, l'angolo di Andrea e l'angolo di Massimo, sono uguali o no?*
17 - *si, sono uguali. Magari sbaglia di qualche millimetro, di poco, però sono uguali*
13 - *il maestro ha detto che le cose non sono mai uguali*
10 - *le cose non sono mai uguali*
Paolo - *adesso Leo con questi tre stuzzicadenti... anzi, con questi quattro stuzzicadenti, devi fare due angoli uguali agli angoli fatti da Dibi. Lui ha fatto due angoli con tre cannucce, tu devi fare due angoli uguali a quelli con questi quattro stuzzicadenti*
17 - *ma li deve usare tutti?*
13 - *ci potrebbero essere varie soluzioni!*
- *ma avevi fatto bene!*



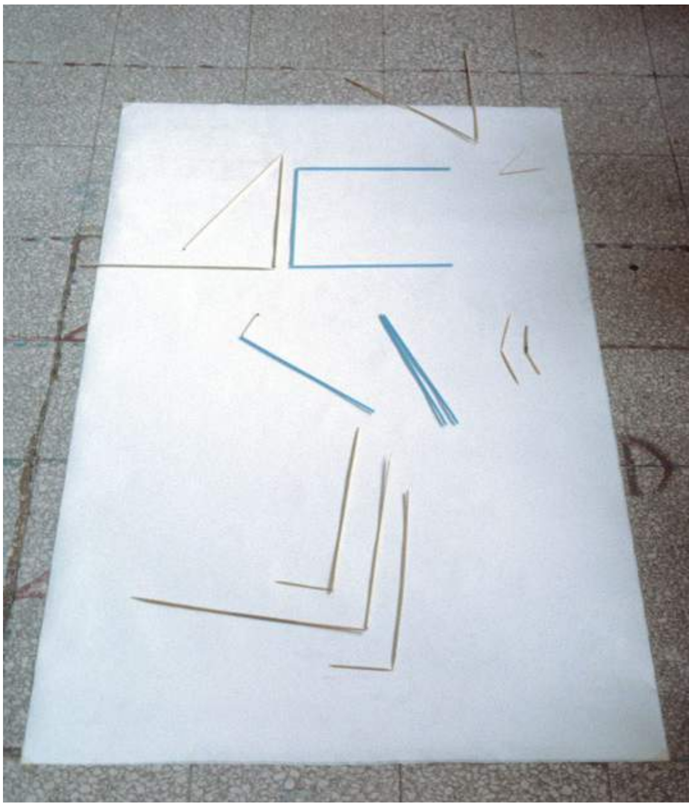


Fig. 89 - **Fig. 90** - Costruzione di angoli con stecchi e stecchini

18 - *non metterli attaccati, se no la cannuccia sembra un lato!*
Paolo - *adesso, Donata con tre stecchini corti dovrebbe fare due angoli, in modo che uno sia doppio dell'altro*
- *io lo so fare*
- *io so un altro modo*
Maestro - *Debora, controlla: quale è quello doppio e quale è quello metà?*

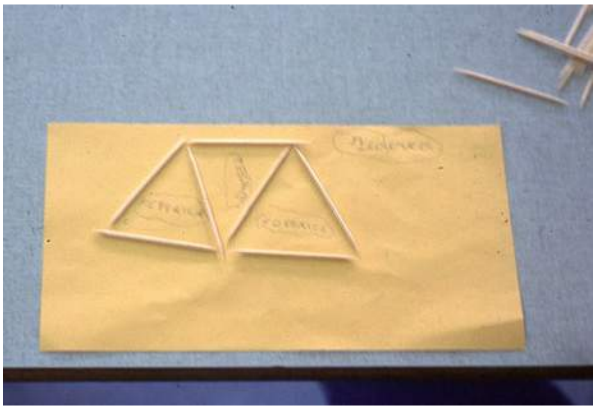


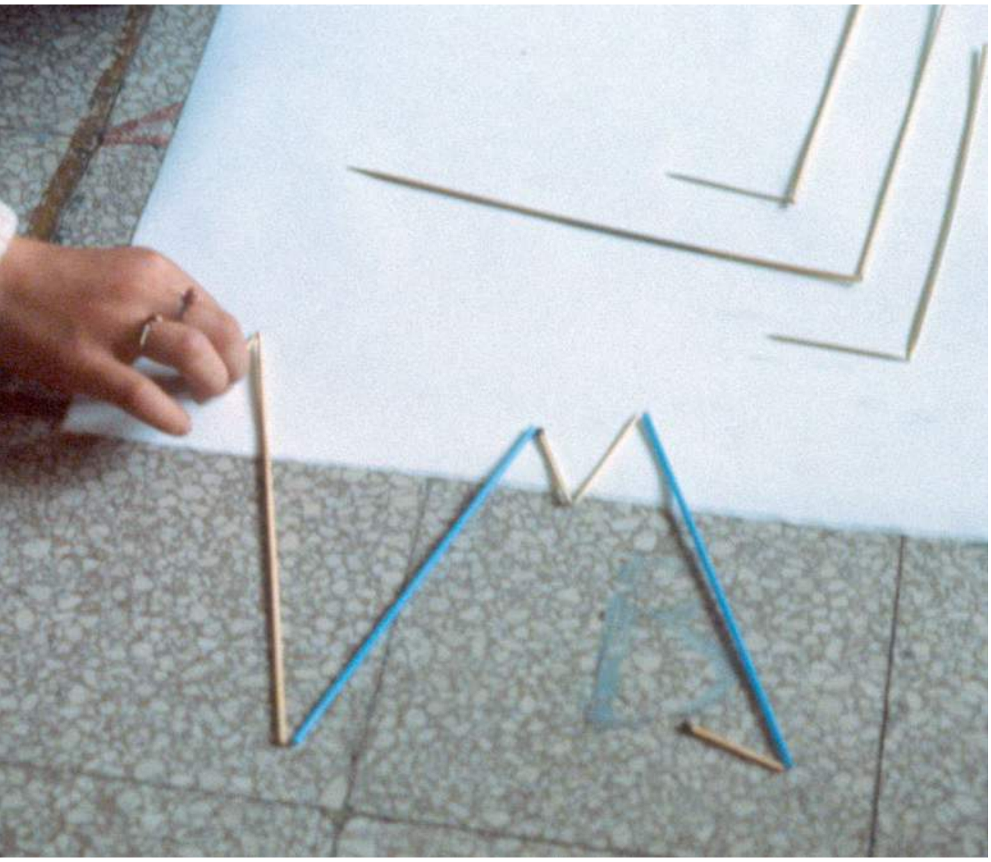
Fig. 91 - Costruire angoli uguali

Debora li indica correttamente ma, in modo quasi imprevisto, il problema della lunghezza dei lati si ripropone attraverso le osservazioni di Sara che non accetta un angolo doppio dell'altro realizzato con stecchini ugualmente lunghi.

2 - *posso dire una cosa, secondo me Donata ha fatto questo, ma non va bene perché questo angolo è molto più corto e quello doppio si deve fare con due stecchini lunghi*
Maria - *allora gli angoli fatti da Massimo e da Andrea sono uguali?*
2 - *sarebbero uguali se quello si tagliasse e diventasse così corto!*
5 - *l'angolo è uguale, solo le righe sono diverse!*
18 - *è l'angolo che deve essere uguale*
16 - *è l'angolo che conta, mica le righe.*
15 - *sono d'accordo con Sara, che ha detto che bisognerebbe tagliare quell'angolo, per farlo come quello di 5*
Maria - *per avere l'angolo uguale a quello di 5 bisognerebbe tagliare le gambe a quell'altro?*
16 - *ha sbagliato: per me anche se la riga è più lunga o più corta non cambia.*

Il gioco prosegue, sempre con un primo bambino che risponde alla richiesta del maestro ed un secondo che critica, approva o commenta quello che il primo ha fatto.
Capita però un imprevisto che, probabilmente, nasce sia da una poco chiara definizione di angolo sia da un "eccesso di cultura" che porta i ragazzi a vedere sempre contemporaneamente gli angoli interni e gli angoli esterni (i complementari, fino a formare un angolo piatto, o gli esplementari, fino a formare un angolo giro) e a non saper più distinguere gli uni dagli altri.

Maestro - *ora con questi quattro stecchi fai un angolo il più grande che si può fare e uno il più piccolo che si può fare*
- *come il più grande?*
Maestro - *questo è il più piccolo o il più grande?*
16 - *quale è il più grande?* (mette gli stecchini a formare una V molto stretta)
3 - *questo*
- *no! è l'altro!* (i due stecchini sono quasi allineati)
Paolo - *adesso Carlo dice quale è secondo lui il più grande e quale è il più piccolo, e poi sentiamo il controllore*
3 - *questo è il più grande, questo è il più piccolo*
11 - *non mi sta bene: questo è il più piccolo e questo è il più grande*
18 - *guarda che è il contrario, eh*
3 - *no, questo è il più grande*
Paolo - *per Mayer l'angolo che Carlo ha detto che era grande è piccolo, e quello che Carlo ha detto piccolo, per Mayer è grande; ti dò altri due stecchini: si può fare un angolo più grande di quello grande?*
11 - *sì, un pochino si... poi viene dritto, viene quasi dritto, ma è così*



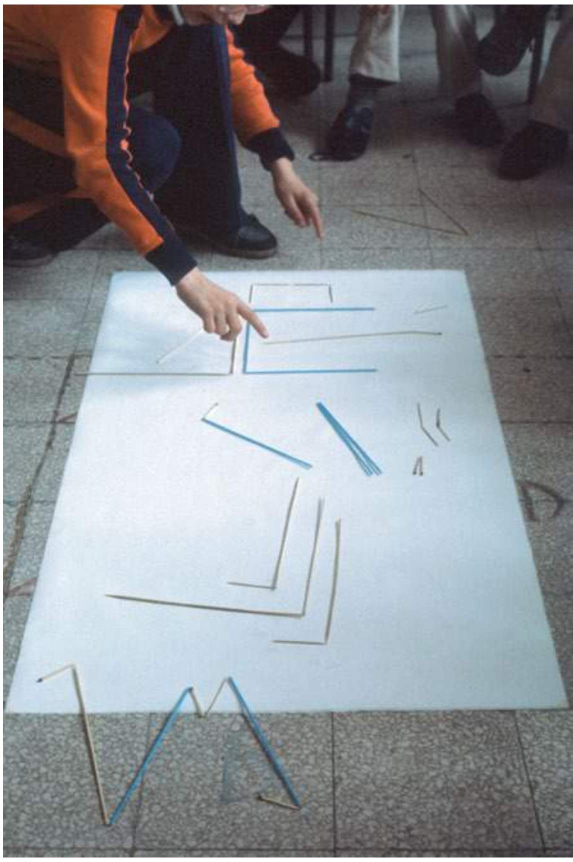


Fig. 92 - Correggere l'angolo più grande
Fig. 93 - Trovare gli angoli diversi

Carlo mantiene la sua idea nonostante il parere contrario di molti compagni, ma Max con molta sicurezza cerca di spiegare la situazione

> 16 - *questo qui* (l'angolo grande di Carlo) *potrebbe benissimo essere l'angolo più grande; e poi questo qui non è il più piccolo. Oppure viceversa, questo qui non è il più piccolo e questo qui non è il più grande. Ti faccio vedere? Io potrei contare questa parte qui dell'angolo* (l'angolo interno, di pochi gradi) *e qua conto questa parte, che sarebbe circa 355°*
> Maria - *Carlo, tu sei d'accordo? quando dicevi che questo era il più grande, che cosa intendevi dire?*
> 16 - *questo è il più grande e questo è il più piccolo, oppure, viceversa, questo è il più piccolo e questo è il più grande. Dipende da cosa guardi.*

La discussione continua molto animatamente, e Max, che vorrebbe convincere i compagni delle sue idee cercando di dare in gradi le misure degli angoli, riconosce facilmente che bisogna precisare il punto di vista e, soprattutto, definire meglio l'oggetto della propria attenzione. D'altra parte, il piacere di non lasciarsi trascinare da quello che si vede per immaginare o considerare, invece, quello che non è immediatamente evidente, è già molto forte nei ragazzi che, seguendo l'impostazione sempre critica del maestro, non vogliono fermarsi alla ovvietà delle apparenze. Comunque bisogna sempre cercare di far capire agli altri le proprie opinioni e la discussione tra Carlo e Max può dare una idea molto realistica delle dinamiche che si sviluppano abitualmente in classe. I tentativi di mettersi dal punto di vista dell'altro non sempre riescono ma sono indispensabili per capire un pensiero diverso dal proprio e magari contestarlo meglio. Così, Carlo disegna una linea dritta ed un'altra con un angolo che Max potrebbe definire di circa 175°... oppure di 185°. Carlo sembra assolutamente convinto delle sue idee, ma non riesce a spiegare bene cosa stia effettivamente guardando. Per tentare di sbloccare la situazione si chiede a Carlo di fare un angolo "gigantesco" con due stecchini... e tutti guardano attentamente cosa riuscirà a fare. Ancora Max non riesce a capire come un angolo che, secondo lui, è di pochissimi gradi possa essere considerato "gigantesco", ma la discussione sembra arrivata ad un punto morto. Invece di intestardirsi a capire meglio il punto di vista di Carlo che sembra ormai bloccato, è meglio proporre nuove attività che provocano nuovi commenti e molti consigli

Paolo - (a Raffaella) *ho fatto con questi stecchi un certo numero di angoli questi angoli sono...*
- *dodici*
- *macché dodici*
Paolo - *tu dovresti trovare uno che è diverso dagli altri: dovresti aggiustare quello che è diverso dagli altri. Ci potrebbero essere delle piccole differenze, perché io non sono bravo a metterli proprio bene, ma ce ne è uno che è decisamente diverso dagli altri. Quello lo dovresti correggere.*
11 - *ce ne stanno due o uno?*
- *io già l'ho trovato!* (lo corregge)
Paolo - *eravamo arrivati a Marco, e Andrea deve criticare Marco.* (A Marco) *fai due angoli con questi due bastoncini; non ne devi fare prima uno e poi un altro: devi metterli in modo che facciano due angoli insieme*
8 - *due angoli!*
- *è difficile*
1 - (mette gli stecchi a T)
11 - *così è già due angoli*
5 - *per me quello li che ha fatto lui va bene, ma si potrebbero mettere anche in un altro modo* (mette i due stecchini a formare un angolo)
- *e dove stanno i due angoli?*
5 - *uno è esterno, e l'altro è interno*
2 - *e addò sta quello esterno!*
5 - *eccolo qui, è sempre lo stesso*
16 - *allora ho ragione io, che bisogna vedere da che parte si guarda!*

Quest'ultimo intervento permette di capire meglio anche le idee di Carlo e l'attività a cui tutti hanno partecipato è servita a mettere in evidenza le difficoltà relative alla geometria degli angoli e a metterle in discussione. Nel contesto (palcoscenico) costruito accuratamente, il dover disporre gli stecchini secondo richieste ben definite aiuta i ragazzi a riflettere con più attenzione sulle proprie idee, a svilupparle attraverso i gesti e a confrontarle con i risultati che vengono via via più o meno contestati dai compagni.

Sempre giocando con gli stecchini, il maestro mette i due stecchi a X e chiede quanti angoli uguali si vedono.

13 - *si devono contare anche questi? sono quattro, e mi sembra che sono uguali questi due*
18 - *basta, e non ci sono altri uguali? sono tutti e quattro uguali.*

Si propongono alcune schede di lavoro che permettono di capire meglio le difficoltà dei ragazzi: una presenta disegni di angoli diversi, tra cui bisogna prima indicare "ad occhio" il più grande e il più piccolo e poi misurarli tutti con i vari strumenti a disposizione, compreso il goniometro. Una seconda scheda, che in altre occasioni era servita per riconoscere i modelli delle più comuni figure geometriche viene ora presentata con la richiesta di trovare gli angoli uguali nelle figure, e poi di misurarli. Bisogna dunque superare nuove difficoltà e trovare vari espedienti per completare il lavoro. Ognuno ragiona a modo suo: non tutti sono capaci di usare il goniometro e la fiducia nei confronti ad occhio è spesso mal riposta. Chi non misura col goniometro si trova un campione di angolo ricalcato sulla carta trasparente e va a sovrapporlo sugli altri angoli per confrontarne l'uguaglianza.

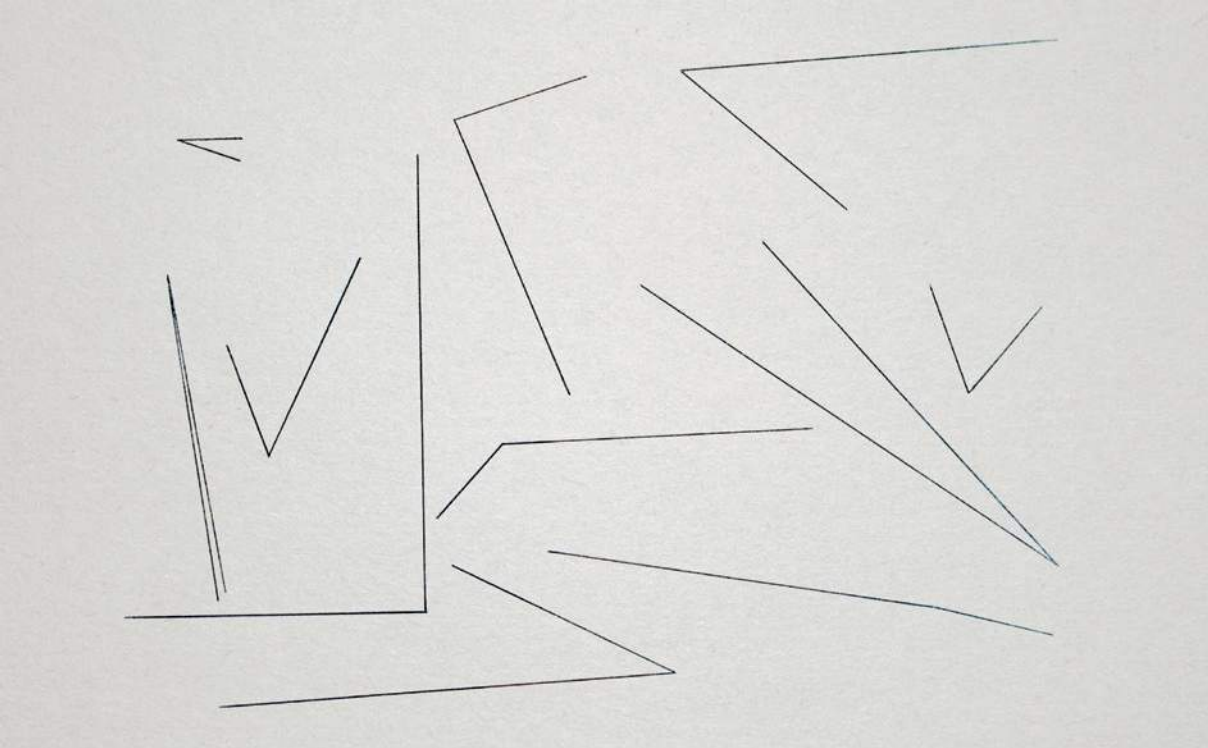


Fig. 94 - Gli angoli: ordinarli dal più grande al più piccolo

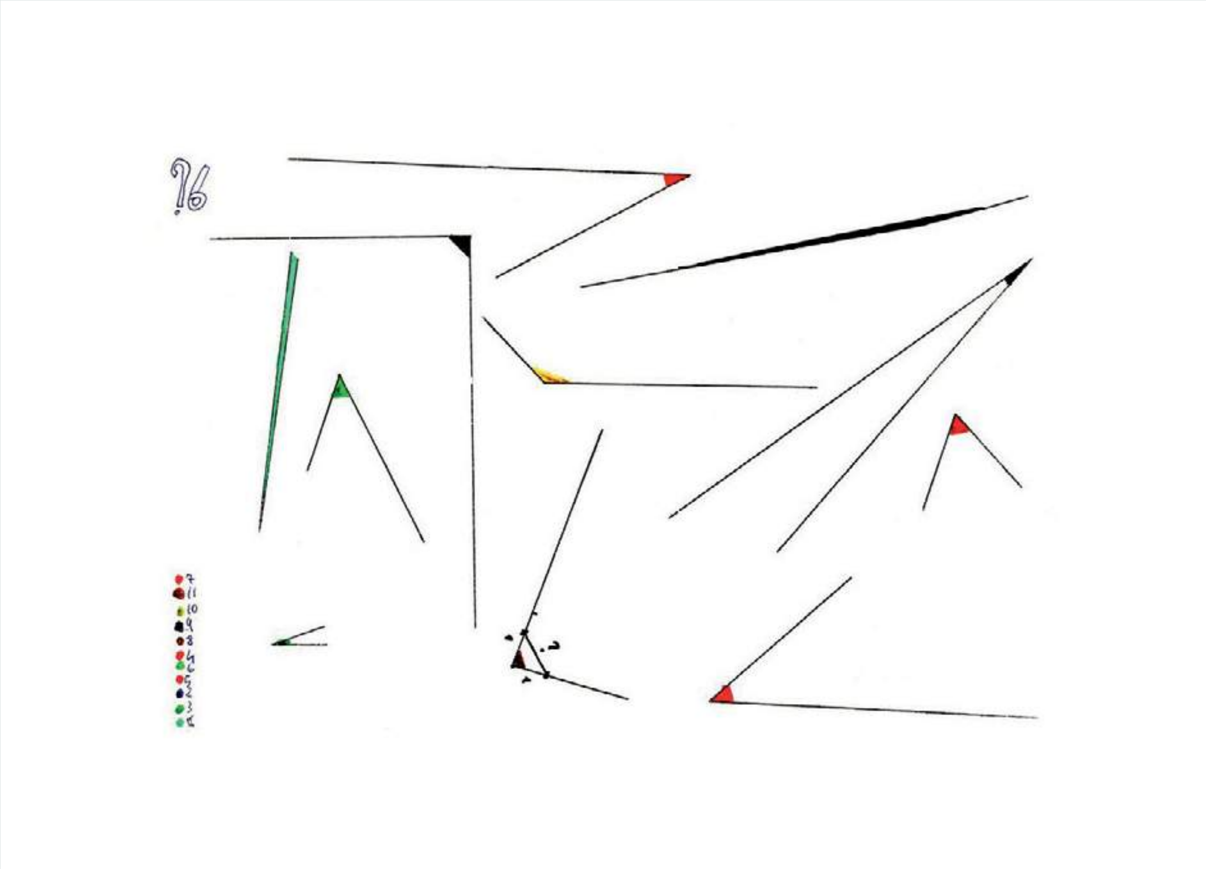
16 - *è una bella fregatura: questo è maggiore di 180 gradi, come lo misuro!*
5 - *ho ricalcato con la carta trasparente un angolo, e poi ho riportato il disegno che ho fatto sugli altri angoli, e ho visto tutti quelli che sono uguali, o che non sono uguali.*

Il maestro spiega ancora una volta il compito da eseguire ma, nonostante tutto il lavoro fatto, per alcuni è ancora difficile isolare percettivamente, nelle differenti figure, soltanto gli angoli, misurarli correttamente col goniometro ed effettuare i confronti. Seguono esercizi sull'uso del goniometro che qui non riportiamo.

Maestro - *non bisogna confrontare le figure, ma gli angoli delle figure, uno per uno*
1 - *dovevamo guardare gli angoli, questa volta, ma angoli e famiglie sono la stessa cosa*
Maria - *secondo te, quadrati e rettangoli che hanno gli angoli uguali sono della stessa famiglia?*
1 - *no*
18 - *ho visto che avevo sbagliato perché certi rettangoli non vanno bene, e certi si: certi rettangoli...*
Maria - *non devi guardare le figure, perchè sono state disegnate apposta per imbrogliarvi, devi guardare solo gli angoli: se vanno bene gli angoli puoi fare lo stesso segno per far capire che sono uguali*
14 - (misura gli angoli col goniometro) *questo mi viene 141 e 142*
1 - *questo mi viene 50, va bene?*
Maria - *non importa quanto viene, basta che riesci a trovare tutti quelli che sono uguali.*

Per portare l'attenzione dei bambini dall'aspetto statico all'aspetto dinamico dell'angolo si chiede loro di trovare nel corpo i vari tipi di angoli : quelli acuti tra le dita della mano, quelli che da acuti possono diventare "quasi piatti" alzando progressivamente le braccia, quelli che si formano allargando le gambe (fino alla spaccata), quelli retti o quasi retti che non è difficile ottenere e visualizzare. Anche gli angoli tra gli stecchini possono cambiare ed è interessante realizzare con le mani, lentamente in modo che tutti possano vedere, i movimenti di rotazione che li trasformano.

Nota: Per una trattazione approfondita della costruzione del concetto di angolo nella scuola elementare cfr il progetto diretto da P.Boero sul sito **didmat.dima.unige.it/miur**



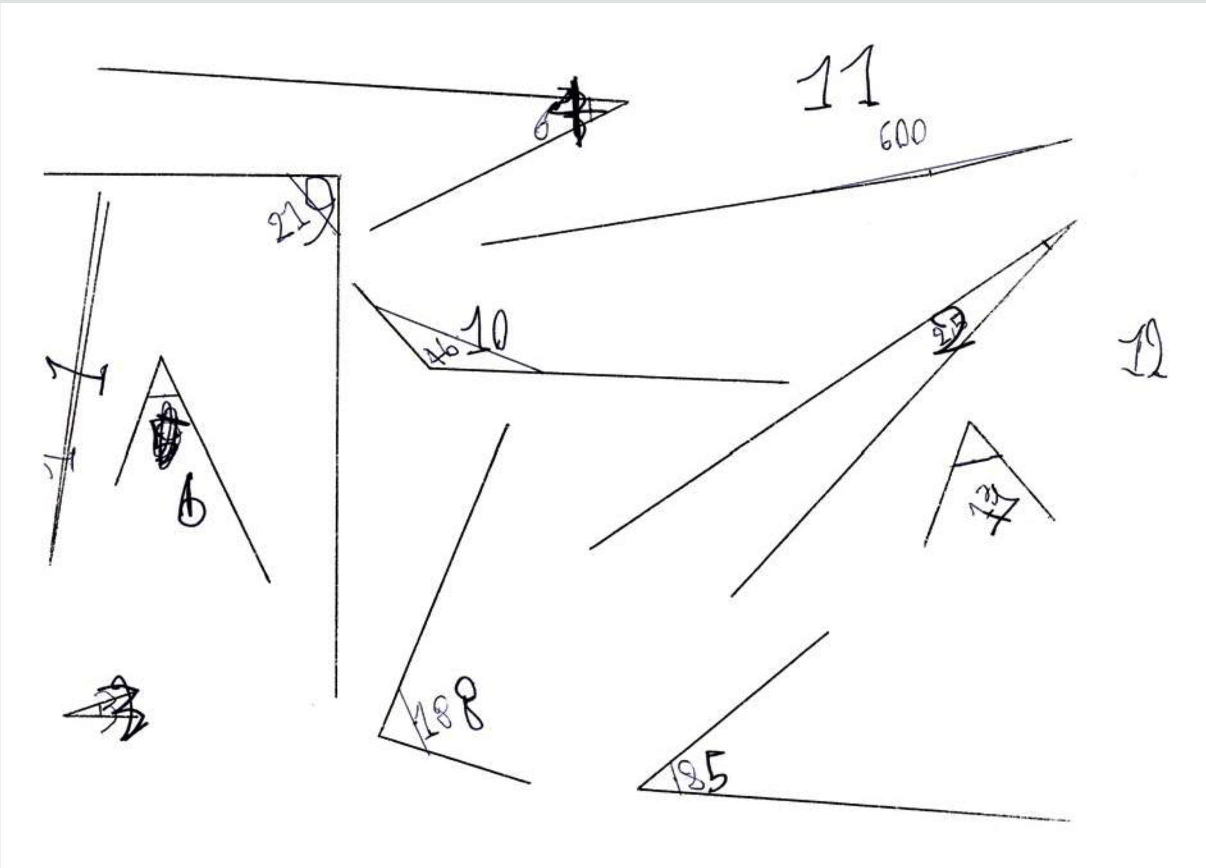


Fig. 95 - **96** - Angoli uguali e diversi

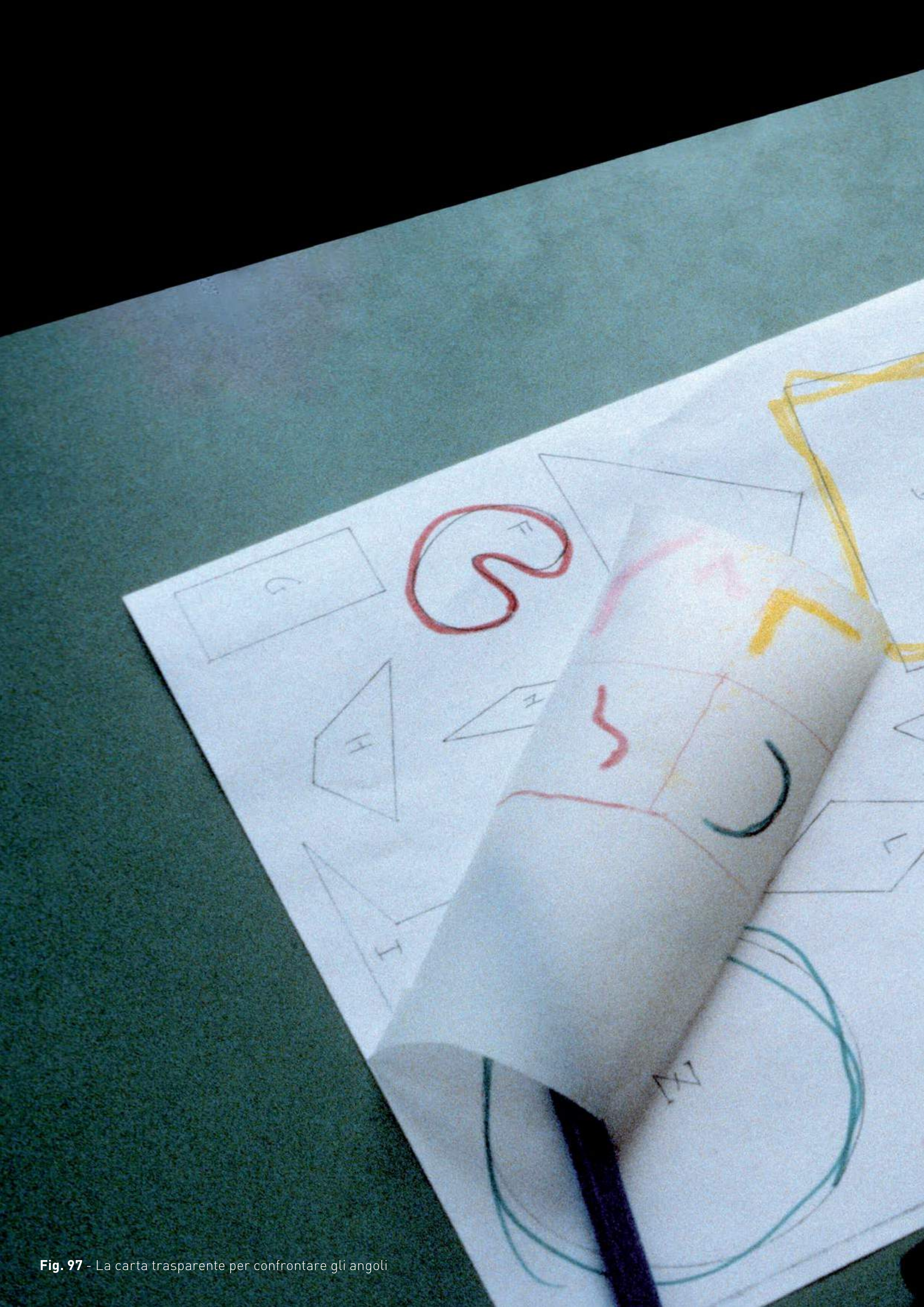
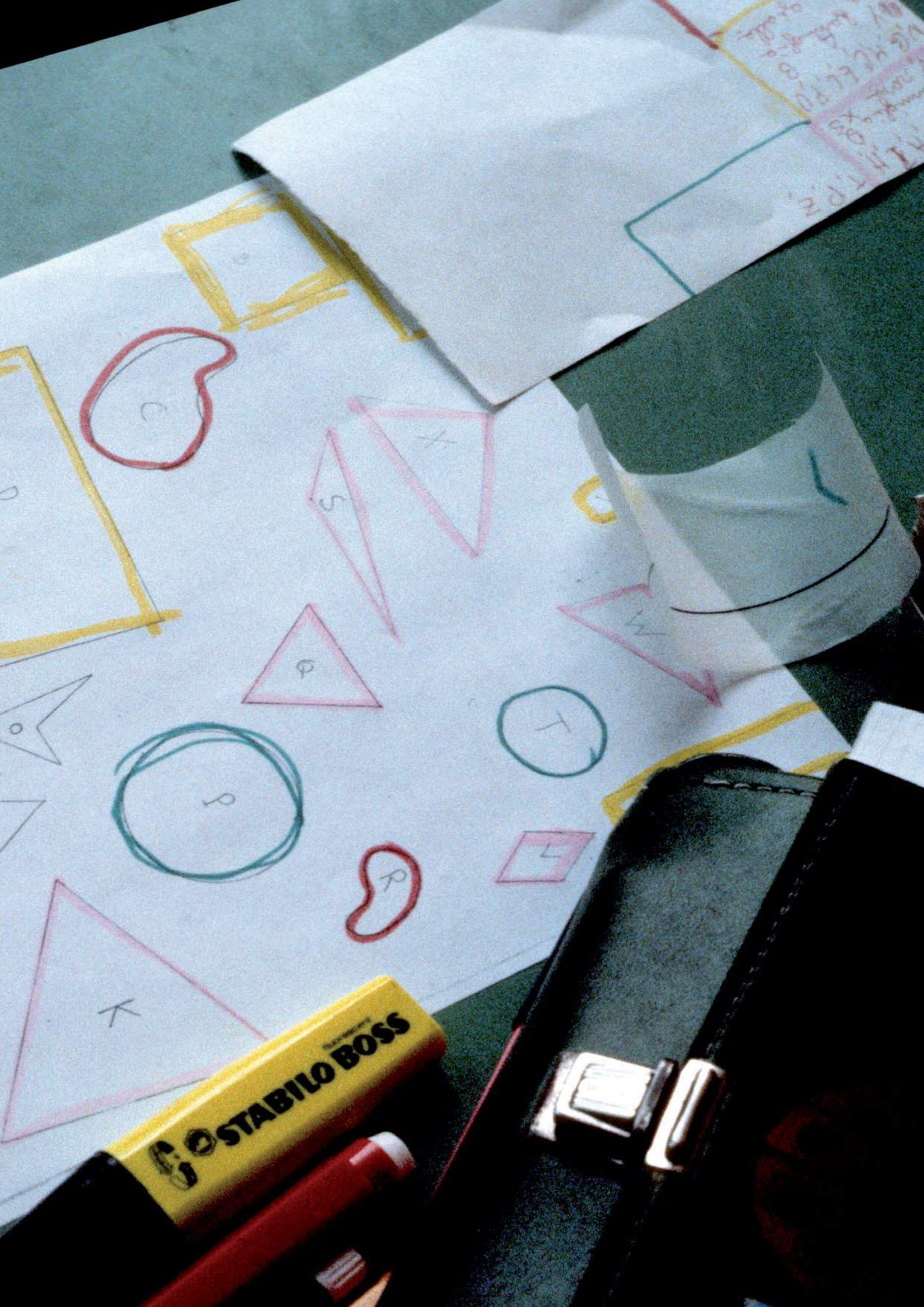
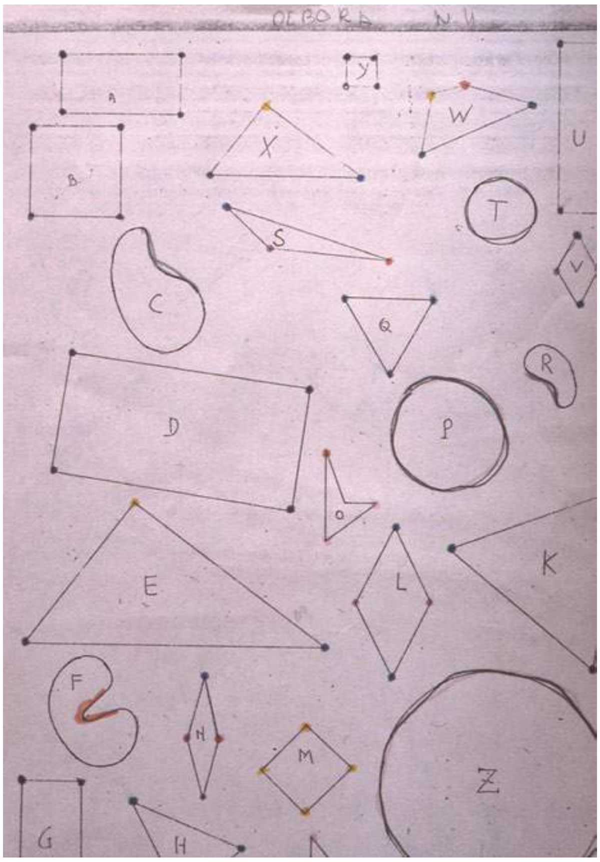


Fig. 97 - La carta trasparente per confrontare gli angoli


STABILO BOSS



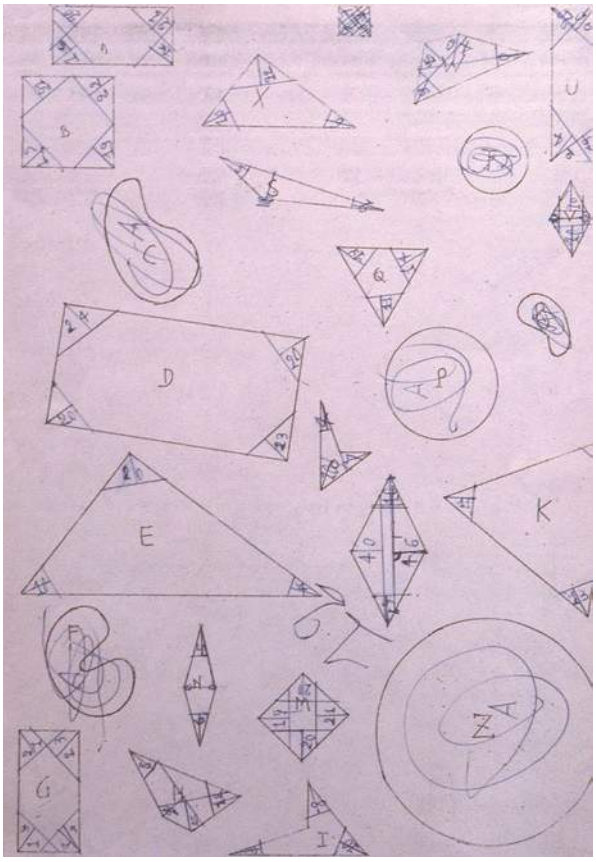


Fig. 98 - **99** - Confronti tra angoli. E gli angoli della circonferenza?

22. Il cartellone... per concludere

A lavoro finito, tutti insieme si cerca di riprendere quello che è stato fatto negli ultimi incontri e di sintetizzarlo in un cartellone conclusivo. I ragazzi ricordano e parlano mentre Pablito scrive la sintesi alla lavagna:

> 18 - *abbiamo cominciato a lavorare con i triangoli quando abbiamo cominciato a fare le famiglie*
> Pablito - *vi ricordate che c'erano tanti triangoli sul foglio e li dovevamo riunire. Dite ciascuno, a giro, con che metodo si può riconoscere se due triangoli sono della stessa famiglia: abbiamo usato tanti metodi diversi, e ora dobbiamo riconoscere quelli che sono giusti, e quelli che sono sbagliati.*
> 18 - *misurando gli angoli e vedendo se corrispondono*
> 16 - *abbiamo trovato un modo con la carta trasparente di vedere se gli angoli sono uguali: lo disegnavamo e poi lo mettevamo sull'altro angolo da misurare*
> 1 - *guardando se la linea è parallela, quella dell'angolo. Una sola basta*
> Pablito - *vuoi dire che tu metti i due triangoli con un angolo sopra l'altro e poi guardi se la linea è parallela al terzo lato del triangolo. Se è parallela non devo fare altre prove, vuoi dire che anche gli altri angoli sono giusti*
> 1 - *ma per vedere che è parallela devi fare delle prove.*

Luca non è d'accordo e sente il bisogno di precisare ancora:

> 17 - *devi dire tutte e due le cose; che l'angolo coincide e che le due linee sono parallele*

C'è ancora qualche irriducibile che insiste sulla necessità di misurare i lati del triangolo e di aggiungere a tutti una certa quantità, mentre quelli che hanno le idee un po' più chiare cercano una mediazione tentando di sviluppare la loro idea di proporzionalità. Si spera che facendo tutti insieme, passo per passo, il disegno alla lavagna si riesca finalmente a capire che il metodo dell'aggiunta non funziona.

> 6 - *io ho usato tre metodi diversi, che mi sono andati bene: prima ho raddoppiato il lato, e mi è venuto giusto; l'altro invece lo ho diminuito di un centimetro, cioè questo è di tre, e lo ho fatto di due, e mi è venuto giusto - invece il terzo metodo ho aggiunto un centimetro, cioè lo ho fatto di quattro, e pure mi sono venuti bene*
> 17 - *pure io prima avevo fatto così, e non mi è andato bene*
> Pablito - *facciamo un esempio alla lavagna e ci rendiamo tutti conto che questo metodo della somma o della sottrazione di pezzi uguali non va bene, forse Emanuela non ha fatto una misura molto precisa, per questo le sembrava giusto*
> 6 - *no, ho fatto una riga*
> 16 - *e allora hai sbagliato*
> 11 - *per me se raddoppi viene sempre uno della stessa famiglia, raddoppiare e basta*
> 1 - *a Emanuela non viene bene perché non sono parallele le barre.*

Si riguarda la tabella con le misure dei lati di un triangolo addizionati o moltiplicati per altri valori. Si controllano insieme i risultati decidendo in base ai numeri se il triangolo che si ottiene è o no della stessa famiglia di quello iniziale.
Dopo aver ancora discusso cerchiamo di condividere le regole valide trovate.
Per correggere le procedure "additive" si suggeriscono altre possibilità: aggiungere va bene quando... si aggiungano ad ogni lato lunghezze uguali a quelle del lato stesso, cioè se ne raddoppi la lunghezza.

Fig. 100 - Si scrivono le regole sulla lavagna

Pablito - *se voglio fare triangoli della stessa famiglia soltanto misurando i lati, come posso fare?*
16 - *basta raddoppiare tutti i lati, si può anche dividere*
17 - *con i due lati di 17 e 17 e uno di 10 c'è solo questo tipo di triangolo che è fatto con due lati uguali, e può essere fatto solo in questo modo*
16 - *non si può solo raddoppiare*
1 - *raddoppiando è proprio la stessa cosa, perché lo fai il doppio, poi lo dividi a metà, è la stessa cosa*
Pablito - *ma se raddoppio tutti i lati, poi devo controllare anche gli angoli, o basta che raddoppio i lati? se ho un triangolo di 20, 34 e 34, sono sicuro che è della stessa famiglia?*
16 - *è sicuro che sono della stessa famiglia*
17 - *non raddoppiare o dividere, moltiplicare o dividere per qualsiasi numero*
16 - *raddoppiare è moltiplicare per due.*

Finalmente ci si accorda su come far funzionare il metodo "del raddoppiare e del dividere" e si riportano sulla lavagna le tre regole trovate finora.

1 - **guardo se tutti gli angoli corrispondono** (confronto degli angoli) - Raffaella
2 - **metto un angolo sopra un altro e vedo se le due linee sono parallele** - Marco
3 - **moltiplico o/e divido per un certo numero la lunghezza dei lati** - Luca e Max

Ma Luca non è completamente d'accordo e le sue obiezioni spostano l'attenzione sulla composizione e scomposizione dei triangoli. Andrea lo sostiene: un conto è vedere se dei triangoli sono della stessa famiglia un conto è riuscire a costruirne altri, sempre della stessa famiglia. In particolare, per essere assolutamente sicuri, bisogna sviluppare la regola del parallelismo (la seconda, di Marco), e completarla con un criterio di proporzionalità tra i lati, avvicinandosi alla regola 3, quella di Max e Luca.

17 - *a me non va bene. Perché Raffaella ha trovato un metodo per capire se due triangoli sono della stessa famiglia, Marco pure, ma Max ed io non abbiamo trovato un metodo per vedere, ma per fare altri triangoli e non è la stessa cosa.*
5 - *si possono mettere metodi per ricavare triangoli della stessa famiglia? per ricavare, non per vedere se sono. Per esempio, se abbiamo questo triangolo ed io devo farne dei triangoli che sono della stessa famiglia: io dovrei dividere questo lato in tre, così mi viene di nove, se lo divido in quattro mi viene di sedici, divido gli altri lati e poi unisco e ho gli altri triangolini.*

Si ricordano i lavori svolti e le difficoltà già superate (figure 68 - 69 - 70)

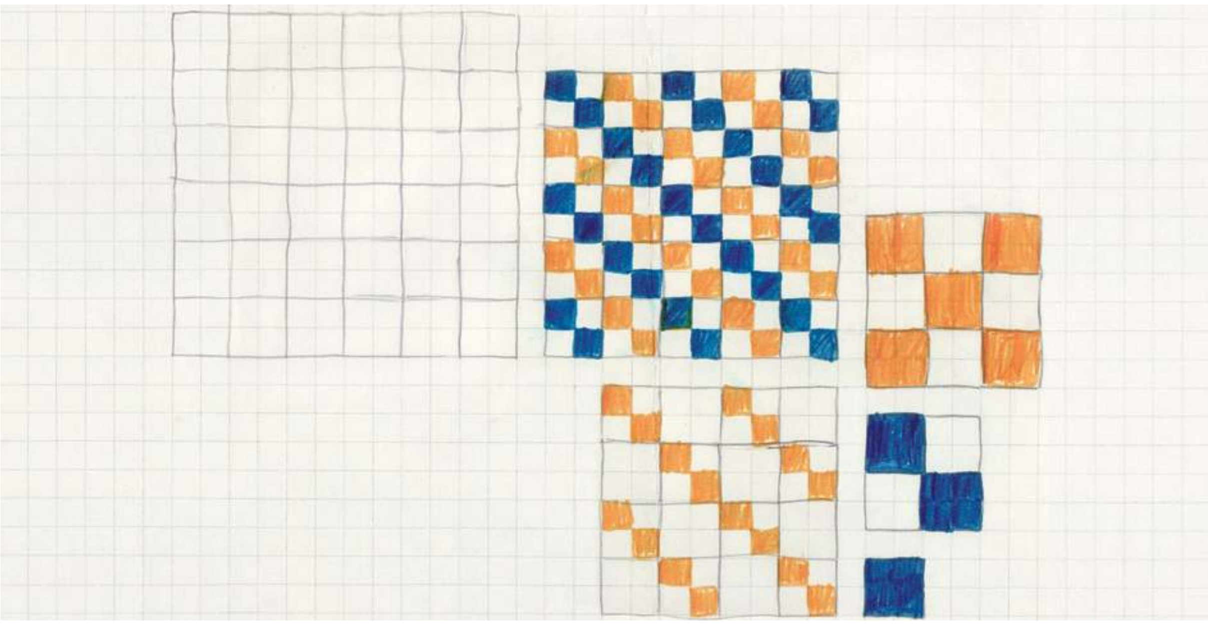
14 - *mi pare che quando abbiamo preso quel triangolo che ce ne doveva avere nove dentro, abbiamo visto che c'era un triangolo che non entravano..*
17 - *poteva essere che in quel triangolo entrassero tutti i triangolini più delle frazioni*

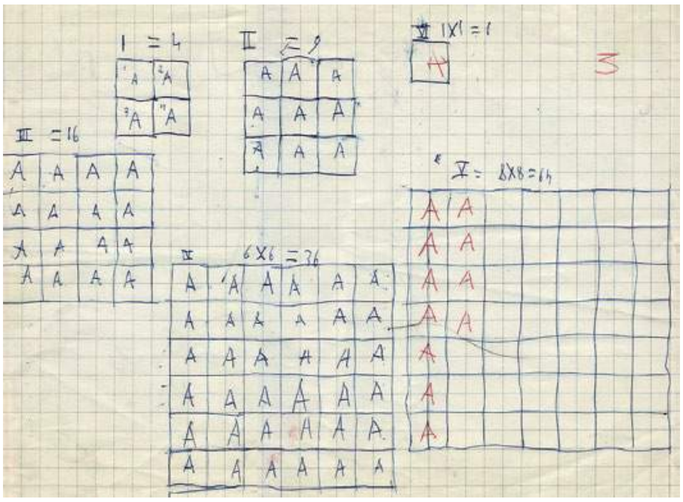
Si cerca di applicare le regole lavorando sui numeri: se si dividono a metà i lati di un triangolo (e si uniscono i punti di mezzo) si possono disegnare 4 triangolini, se si dividono i lati in tre parti, i triangolini saranno nove, con che metodo si potrebbero avere dentro 64 triangolini?

2 - *facendo otto per otto*
- *facendoli più piccoli*
Pablito - *se io ho un triangolo che ha un certo numero di triangolini nove, o venticinque*
- *se io raddoppio tutti i lati di questo triangolo questo numero qui come diventa? se sono 25...*
2 - *diventano 100; fai 25 per quattro*
Pablito - *quindi se il lato lo ho moltiplicato per due, i triangolini sono moltiplicati per quattro. Mayer prima aveva detto che se raddoppiava il lato, raddoppiava pure il numero dei triangolini, ma non funziona*
11 - *avevo fatto 16x2. Pensavo che c'erano 16 triangolini in un lato!*

Pablito - *scriviamo così: se in un triangolo ci sono tanti triangolini, in un triangolo che ha il lato doppio ci staranno il quadruplo dei triangolini. Altra domanda: se io invece di raddoppiare il lato lo triplicassi, il numero dei triangolini che farebbe? Come facciamo a capirlo? Facciamo la prova*
16 - *se noi moltiplichiamo per tre questo lato, è come se noi prendiamo un triangolino di questi, e lo moltiplichiamo per tre, e anche qui succede la stessa cosa, che prendo quello e pure lo moltiplico per tre.*

Non tutti i bambini sono in grado di seguire il ragionamento corretto: molti pensano che se raddoppia il lato raddoppiano anche i triangolini interni. Così i numeri suggeriti non sono verificati dai risultati delle prove che, seguendo le varie idee, vengono fatte alla lavagna seguendo le specifiche indicazioni, e i triangolini riempimento risultano essere sempre troppo pochi. Un lavoro analogo viene fatto con i quadrati, disegnati dai ragazzi su carta quadrettata. I lati crescono progressivamente di una unità, il numero dei quadratini interni, invece... aumenta vertiginosamente.
Mettendo i numeri in tabella, la regola dei quadrati appare evidente, si capisce facilmente anche quella relativa ai triangoli e il cartellone conclusivo, costruito insieme, sembra per ora abbastanza accettato e condiviso da tutti.





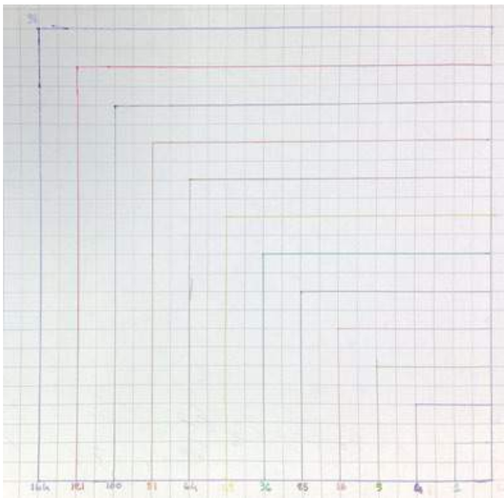
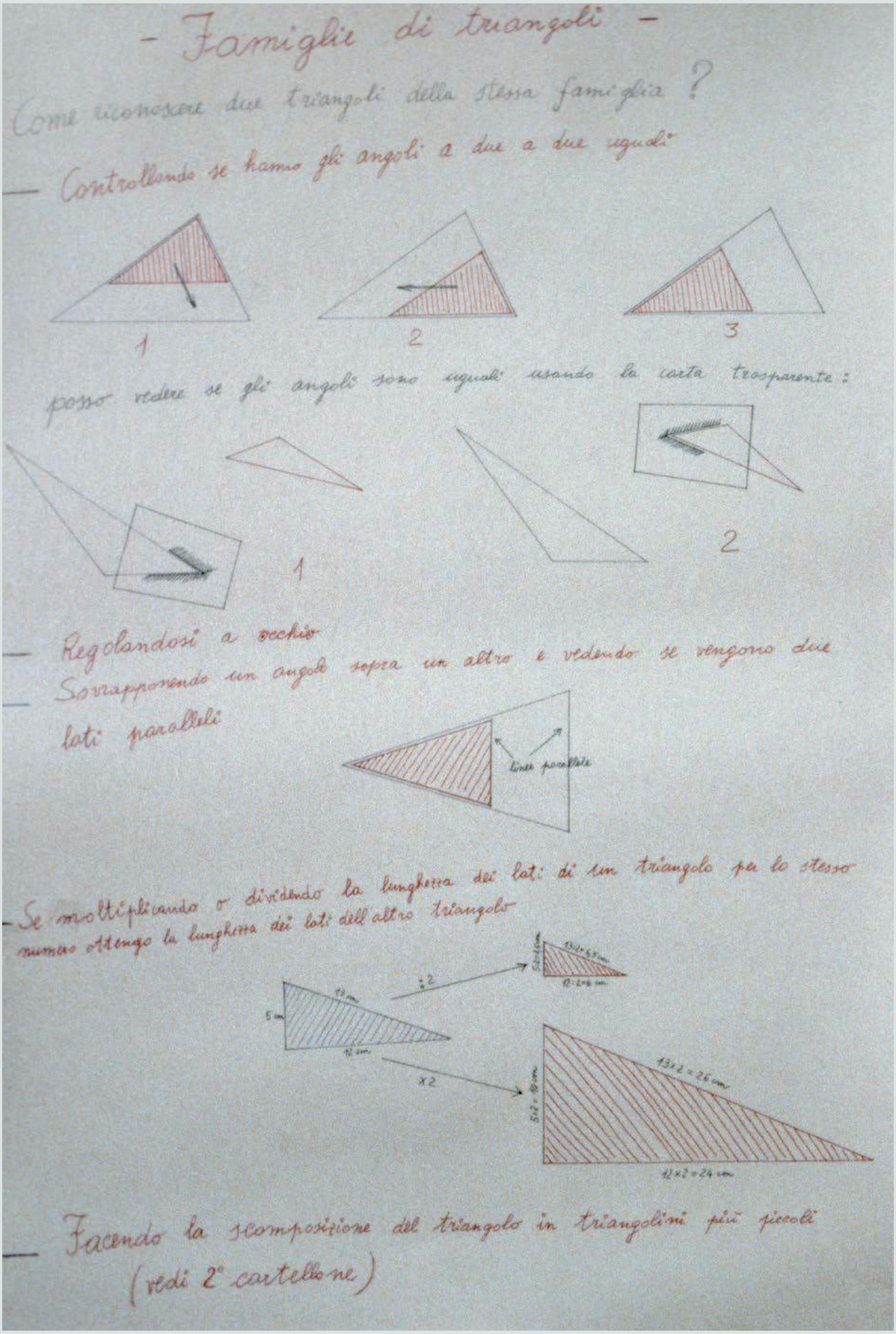


Fig. 101 - **102** - **103** - quadratini... al quadrato


- Famiglie di triangoli -
Come riconoscere due triangoli della stessa famiglia?
— Controllando se hanno gli angoli a due a due uguali
1
2
3
posso vedere se gli angoli sono uguali usando la carta trasparente:
2
1
— Regolandosi a occhio
— Sovrapponendo un angolo sopra un altro e vedendo se vengono due lati paralleli
linee parallele
- Se moltiplicando o dividendo la lunghezza dei lati di un triangolo per lo stesso numero ottengo la lunghezza dei lati dell'altro triangolo
13 cm
5 cm
12 cm
: 2
x 2
13 : 2 = 6,5 cm
12 : 2 = 6 cm
13 x 2 = 26 cm
5 x 2 = 10 cm
12 x 2 = 24 cm
— Facendo la scomposizione del triangolo in triangolini più piccoli (vedi 2° cartellone)

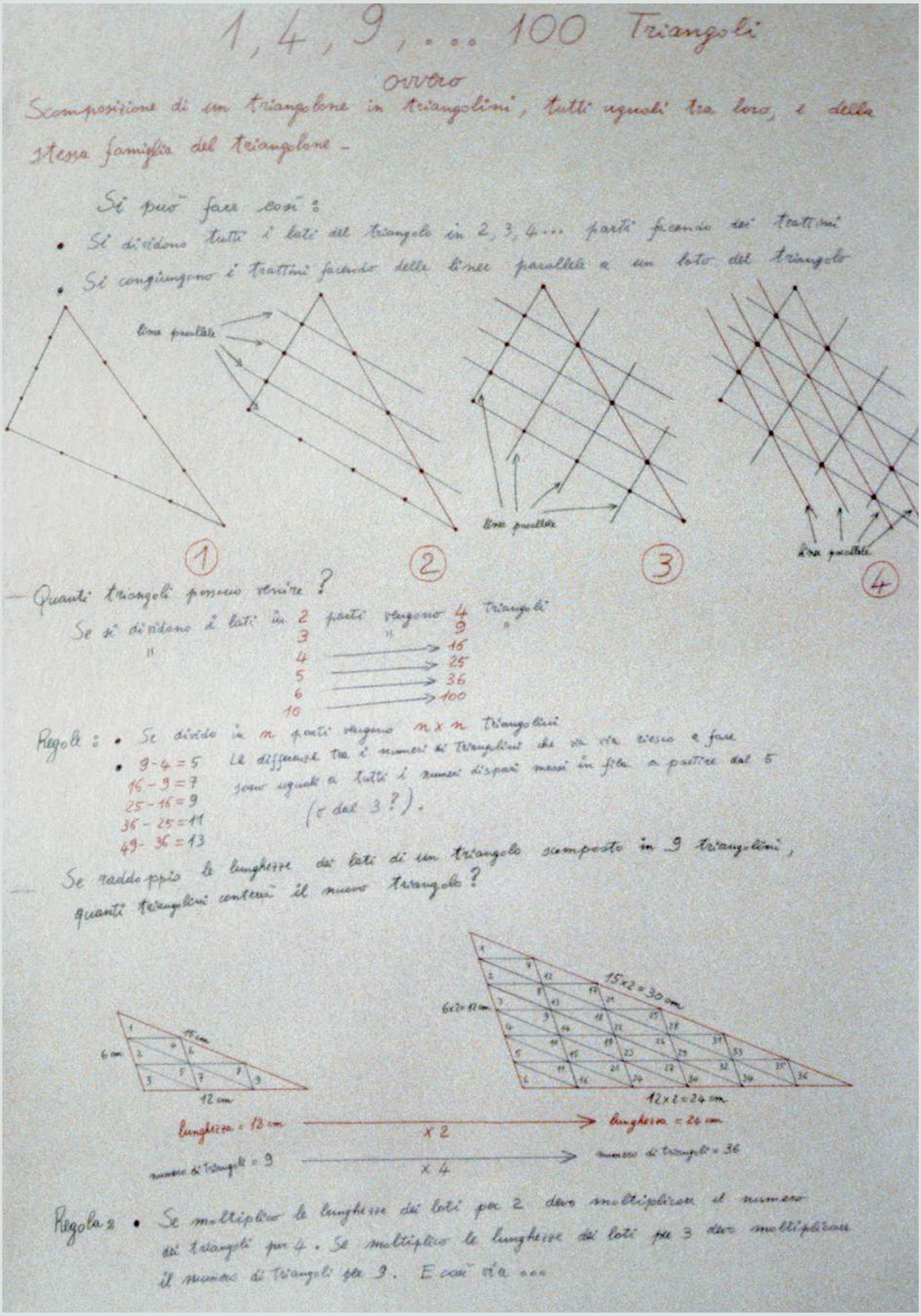


Fig 104 - **105** - Gli schemi conclusivi:
1) come individuare i triangoli simili
2) come scomporre un triangolo grande in triangolini uguali e della stessa famiglia del triangolone.

23. Linee parallele

Le tre regole scritte sul cartellone indicano abbastanza chiaramente i criteri per individuare i trian-

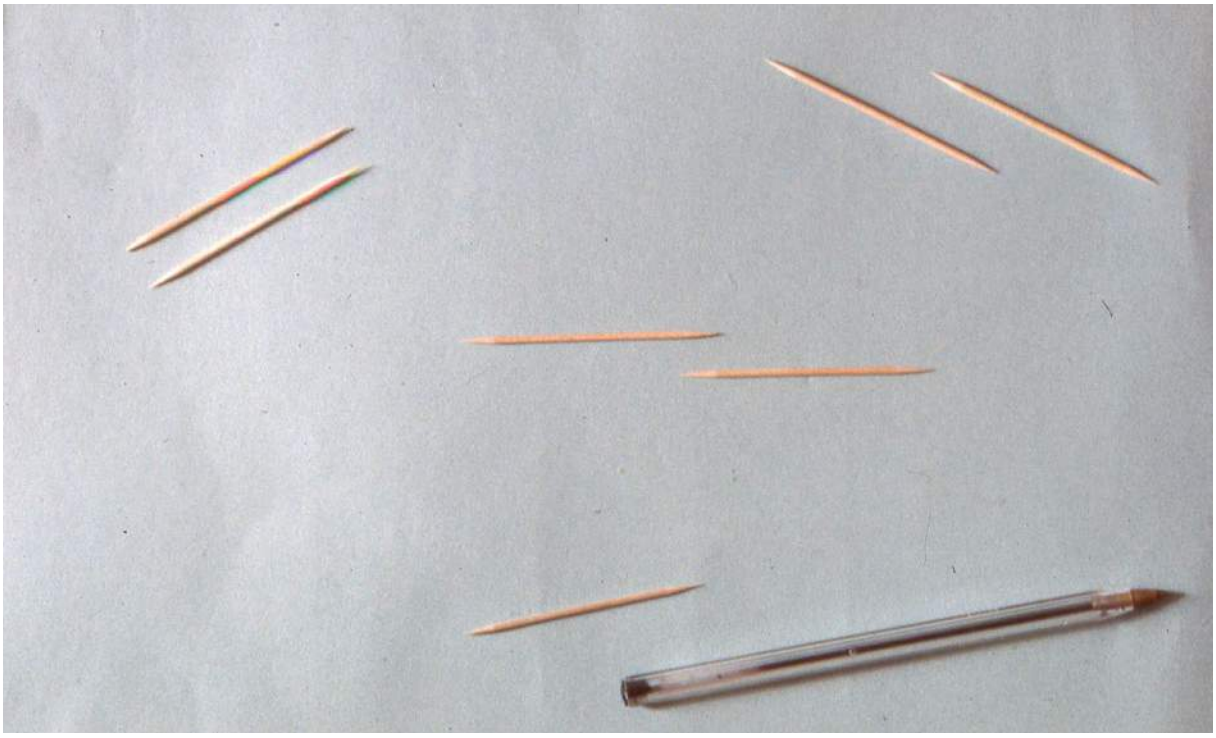


Fig. 106 - Stecchini paralleli

goli simili, ma anche questa volta c'è una parola di cui bisogna precisare il significato.
Così comincia la discussione per spiegare cosa si intende per "linee parallele" e, prima di arrivare ad una definizione si cercano i parallelismi nelle figure e nei materiali a disposizione, in modo che l'esperienza concreta possa sostenere poi la definizione più astratta. Gli stecchini da disporre sul piano della lavagna luminosa sono di aiuto e solo quando, come dice Carlo, la distanza tra loro "è sempre la stessa" possono rappresentare delle linee parallele.
Lavorando con gli oggetti, cioè con stecchini e matite e con le loro ombre proiettate sul muro, la difficoltà è quella di capire quali caratteristiche devono essere astratte dalla situazione concreta e quali invece non sono significative per spiegare il parallelismo. Il maestro prova quindi a portare l'attenzione sul diverso spessore degli stecchini e della matita, sulla loro diversa lunghezza, sulla loro posizione nello spazio per saggiare la solidità della definizione che i ragazzi sanno ben esprimere a parole. La corrispondenza tra la situazione che tutti vedono e le parole che si trovano per rappresentarla lascia spazio a numerose imprecisioni e ambiguità: come sempre, bisogna fare un grosso sforzo per riuscire ad esprimere correttamente quello che tutti vedono con gli occhi.

Pablito - *se a qualcuno non è chiara la parola* ***parallele****, gli altri gliela spiegano. Secondo te, Luca, questi stecchini sono paralleli?*
17 - *questi sono paralleli perché uno stecchino è circa alla stessa altezza dell'altro*
Maestro - *che significa secondo te parallelo? Che vuol dire stare alla stessa altezza?*
- *che sono nella stessa posizione, non lo so*
18 - *è una parola spiegarlo!*
3 - *parallelo vuoi dire due linee che poi non si incontrano, che son messe per così*
Pablito - *questi due stecchini sono paralleli secondo te?*
3 - *no*

Pablito - *come faresti a dimostrarlo?*
3 - *perché dovrebbero avere la stessa misura da qua a qua: queste non sono parallele, ed eccone la prova: da qui arrivano e si toccano la punta, da quest'altra parte invece, la distanza è più grossa di questa! questa è più larga, questa è più stretta: per essere paralleli devono essere sempre alla stessa distanza, alla stessa misura.*

> **Enriques:** Due rette di un piano che non hanno punti comuni si dicono parallele

La spiegazione di Carlo sembra convincente ma quando il maestro ripropone la domanda si vede che qualcuno non ha ancora capito. Il maestro non corregge quello che i bambini dicono ma lo sfrutta per portare l'attenzione sulle parole che richiamano altre caratteristiche della situazione concreta. Solo "prendendo sul serio" la definizione non corretta potrà verificare la solidità delle conoscenze di coloro che hanno dato la definizione corretta

Maestro - *che significa secondo te parallelo*
8 - *come ha detto Luca, due linee che sono più o meno uguali*
17 - *io non ho detto così*
Maestro - *allora questi due stecchini, che sono più o meno uguali sono anche paralleli? e questi due, che non sono uguali perchè uno è ciccione e uno è fino, sono paralleli o no?*
8 - *si, stanno alla stessa altezza*
- *sono lunghi uguali*
- *stanno alla stessa altezza anche se uno è fino e uno no.*

Fig. 107 - Ombre parallele

Ecco che, mentre si analizzano le caratteristiche "più o meno uguali" che permettono a Dibi di dire che due linee sono parallele, tra le variabili prese in considerazione compaiono sia la lunghezza degli stecchini sia la disposizione nello spazio. Probabilmente, parlando di altezza i ragazzi intendono dire distanza, ma ancora bisogna indagare e provocarli per capire cosa veramente hanno in testa, aggiustandone le parole mentre il loro pensiero si avvia gradualmente nella giusta direzione. Si discute su tante piccole cose... che sono piccole solo apparentemente, e di volta in volta il maestro provoca, verifica, tenta di confondere i ragazzi per metterli alla prova. Alla ricerca del parallelismo, si continuano a guardare le ombre degli stecchini proiettate sul muro:

10 - *devono stare uno sopra l'altro, se non li mettiamo uno sopra l'altro, e li metti uno qua e uno la, come fanno ad essere paralleli?*
17 - *allora secondo te, Massimo, devono essere uno sopra l'altro alla stessa altezza!*
Maestro - *ora guarda l'ombra di questi tre stecchini: quali di queste linee sono parallele? quali di questi oggetti sono paralleli?*
- *tutti e tre*
Maestro - (ne sposta uno in avanti) *adesso quali sono paralleli?*
- *solo questi due*
Maestro - *e quest'altro non più, è scappato dal parallelismo*
10 - *solo le punte sono parallele. E devo dire ancora una cosa: se questa fosse lunga fino a qua, sarebbe parallela*
Maestro - *allora è che devono cominciare precise! e adesso sono tutte e tre parallele, però se invece questa comincia così allora non sono più parallele!*

Dagli stecchini alle linee parallele (e ancora parliamo di linee e non di rette) il processo di astrazione non è facile e ci si trova davanti la solita contraddizione: quanto è utile lavorare sul concreto per favorire il pensiero astratto? Quanto invece la stessa concretezza diventa un ostacolo? Quanto l'immagine di stecchini paralleli proiettati sulla lavagna corrisponde all'idea di parallelismo che i ragazzi hanno già in testa? É possibile immaginare rette parallele "infinite" a partire dalla finitezza degli stecchini? É possibile immaginare la prosecuzione degli stecchini o delle loro ombre, trasformandoli in rette invisibili nello spazio? Il maestro lavora con Massimo aiutandolo a superare cognitivamente i vincoli del concreto, spostando le ombre proiettate sul muro e facendo uscire e rientrare gli stecchini sul piano della lavagna, invogliando i bambini a vederne le continuazioni invisibili. Ma la trasformazione delle ombre in linee geometriche è ancora difficoltosa e la loro immaginaria prosecuzione all'infinito non viene percepita:

Maestro - *Massimo dice: le ombre sono parallele solo se cominciano uguali. Allora quelle degli stecchini così che non cominciano uguali sono parallele?*
10 - *no, questa qui no, che è un pò più avanti*
Maestro - *e guarda adesso tutte e tre queste ombre.* (Due stecchini sono paralleli sul piano della lavagna e il maestro ne fa entrare un altro muovendolo dal bordo fin dentro il campo luminoso, parallelo agli altri due) *Vedi, questa ombra comincia da laggiù e si vede nel momento che viene illuminata. Secondo te, queste ombre sono parallele tutte e tre?*
10 - *si*
Maestro - *perché?*
10 - *perché... non sta proprio..., perché... combaciano le punte*
Maestro - *ora le punte combaciano, e allora sono parallele. Ora guarda bene* (sposta uno stecchino in avanti lasciandolo parallelo), *non sono più parallele? le punte non combaciano più...*
10 - *adesso sono sbagliati, non combaciano le punte*
Pablito - *allora finché sta dentro il piano della lavagna, in pari con gli altri, da qui fin qui è parallela, e la parte che sta fuori, da qui in poi, no*
Maestro - *secondo Massimo deve stare in linea con le altre. Sara, tu prima avevi detto che dovevano avere sempre la stessa distanza, e adesso?*

2 - *io non mi ricordo che ha detto Carlo, però fino a che me lo ricordavo, ero d'accordo con lui*
Maestro - *Carlo ha detto che due linee che non si incontrano, e che hanno sempre la stessa distanza sono parallele.*

Adesso il maestro mette sul piano della lavagna la rotaia di un trenino, piegata ad S e se ne serve per mettere in discussione la definizione di Carlo sulle linee che non si incontrano. Un pò confuso dalle sollecitazioni del maestro, Carlo torna infine ad essere d'accordo con se stesso affermando che le rotaie sono parallele solo nel piccolo tratto rettilineo e non quando fanno la curva. Altri sostengono che le rotaie sono linee curve parallele, in quanto mantengono sempre la stessa distanza, Proprio qui compare l'importanza di vedere la retta come una particolare tipo di linea, e portare i ragazzi a costruire sulla evidenza una definizione che non sia in contrasto con quella che dà Euclide nel famoso V postulato delle parallele.

Fig. 108 - Rette parallele o curve parallele?

8 - *per me parallele sono due linee che stanno circa alla stessa altezza.*
Maestro - (sfasando gli stecchini) *se uno li mette così stanno alla stessa altezza? Carlo, secondo te non è come dice Massimo che per essere parallele devono cominciare dallo stesso punto. Guarda l'ombra: possono essere parallele anche così?*
(mette sul piano della lavagna luminosa delle rotaie da trenino, curvate ad S)
Guarda adesso queste della rotaia che sono curve, non sono dritte. Sono parallele? sono sempre alla stessa distanza

8 - (guardando le rotaie curve) *parallela vuol dire per me che è una riga dritta, che fosse così o così, o così* (indica diverse direzioni nello spazio) *basta che sia dritta*
Maestro - *basta che sia una sola?*
8 - *basta che sia dritta*
- *parallelo sono due linee*
- *si, sono due linee... sono sempre parallele*
3 - (guardando le rotaie indica il punto di flesso della S) *sono parallele benissimo, in questo punto sono parallele*
Maestro - *tu hai messo uno stecchino per indicare che sono parallele solo in quel punto! hai detto: in questo punto sono parallele*
3 - *ma... non sono più d'accordo con me stesso*
Maestro - *e questo ci sta bene*
3 - *no, questa certo non è dritta, non è parallela. Beh no, guarda, sono d'accordo sempre con me stesso, perché qua si curva, perciò è parallela solo fino a questo punto*
8 - *solo in questo pezzetto*
Maestro - *perché?*
8 - *perché questo pezzetto si potrebbe dire che è dritto* (indica il punto di flesso della S)
Palito - *quale pezzetto?*
8 - *da qui a qui, è parallelo*
2 - *vorrei aggiungere una cosa: per me parallelo vuoi dire due linee dritte che sono alla stessa distanza, cioè dritte o storte, basta che sono alla stessa distanza*
1 - *sono due rette che non si incontrano mai*
Pablito - *che vuoi dire che non si incontrano mai? mica due rette sono due ragazzini che camminano!*
1 - *due linee rette sono due linee dritte, o due stecchini in questo caso, che vanno sempre dritti, pure se così è un pò storta. Se sono così lì puoi mandare avanti, e non si incontrano, invece se sono così, se li mandi avanti, si incontrano; invece così non si incontrano mai. Se li metti così, e dici che vai in questo verso, bah, si incontrano lo stesso, pure se aumentano: perciò, due linee che non si incontrano mai*
Pablito - *allora parallele sono due linee che non si incontrano mai*
Maestro - *due linee che non si incontrano mai, o due linee dritte?*
1 - *due rette, due linee dritte*
Maria - *e se ne continui una sola, che succede?*
1 - *è che non si può vedere se sono rette o no*
Maria - *se la continuo su questa stessa sua direzione, che succede? Sono ancora parallele o no?*
1 - *non si può vedere se sono rette o no*
Pablito - *ma se questi due sono paralleli, e poi uno lo sposti così, continuandolo, sono ancora paralleli?*
6 - *per me paralleli significa che li puoi mettere, dritti o storti, che non si incontrano mai, però anche se hanno una distanza così, capito?*
Maestro - *ossia che hanno sempre la stessa distanza, anche se la distanza è enorme, basta che sia sempre la stessa distanza*
Pablito - *questi qui sono paralleli e questi tre stecchini sono paralleli?*
17 - *sono d'accordo con Emanuela, che sono parallele due linee dritte o curve o storte come quelle che ha fatto il Maestro, purché stanno sempre più o meno alla stessa distanza. Anche se girano non importa*
18 - *per me devono essere due linee dritte*
Pablito - *quindi niente rotaia?*
18 - *niente, niente, poi devono essere affiancate, non si devono incontrare e devono avere sempre la stessa distanza*

Le difficoltà riguardano sempre le capacità di astrarre concetti geometrici dall'esperienza concreta e se i sussidiari danno spesso per scontato il passaggio cognitivo dal segmento alla retta noi vediamo che, cambiando contesto, il segmento "ombra di stecchino" non suggerisce facilmente l'idea di retta.

24. Ribaltamenti e composizione di quadrilateri

Per evitare che i ragazzi si abbandonino a cercare dettagli insignificanti nel fatto che gli stecchini non sono perfettamente dritti o che non sono perfettamente ben messi sulla lavagna si ricomincia a lavorare sui triangoli e sulla possibilità di comporli per costruire figure. Sul pavimento sono sparpagliati triangoli di diverse famiglie ritagliati su cartoncini che mostrano una superficie bianca mentre sull'altra è stata disegnata una faccia (in realtà la faccina è stata disegnata su tutti i triangoli ma in alcuni si trova sulla parte rivolta verso il pavimento e quindi non si vede). I ragazzi giocano a comporre figure e si accorgono subito che accostando per un lato due triangoli uguali vengono dei quadrilateri. Marco cerca di spiegare come, unendo triangoli, è riuscito a fare quadrilateri di due tipi ma Debora ne ha costruiti ben sei diversi e, disponendoli sul piano della lavagna luminosa, mostra ai compagni le procedure seguite e i risultati ottenuti. Anche Dibi, Massimo e Raffaella mostrano le loro composizioni ai compagni usando la lavagna luminosa.

Maestro - *Debora, spiega prima come hai fatto i tuoi sei quadrilateri*
4 - *ci sono dei triangoli che da una parte hanno la faccia. Li posso mettere vicini dalla parte con la faccia, e ne faccio tre; poi li posso mettere uno con la faccia e un'altro no... e vengono altri tre*
Maria - *vieni, magari con i tuoi triangoli, e fa vedere alla lavagna luminosa quello che hai fatto*
8 - *questa figura l'avevo pensata anche io, ma non mi è venuta, infatti*
Maria - *prendi anche tu i tuoi triangoli*
8 - *eccolo qui il mio, viene tipo rombo*
17 - *è una specie di aquilone*
Pablito - *questo lo hai fatto, ora vediamo gli altri*
8 - *questo è un altro, è un'altra forma di aquilone ...si... è aquilone visto di profilo, no, dall'alto..*
10 - *Maria, ho fatto questo qua, lo posso far vedere?*
18 - *una volta ho fatto così, diciamo a plip*
Maria - *Raffa, che parola strana hai usato! che significa? spiega agli altri che cosa vuol dire "plip"*
18 - *vedi questi triangoli hanno una parte con la faccia e una parte senza faccia. Ora metto la parte con la faccia sulla lavagna, e poi la rivolto, così. Questa è plip, e viene un certo quadrilatero*
10 - *lo hanno chiamato plip dal rumore, senti? quando lo rivolti*
18 - *poi ho fatto anche un'altra cosa: ricapitoliamo. La prima volta col plip, e l'altra volta mettendoli vicini. Poi li ho fatti sull'altro lato, e ho fatto sempre con il plip, e poi li ho fatti così senza plip. Li disegno?*
Maria - *a Luca invece sono venute le punte di freccia*

25. Uguaglianze di forma

É chiaro che con il "plip" Raffaella indica il ribaltamento del triangolino su uno dei suoi lati e questa parola diventa immediatamente condivisa, entrando a far parte del gergo della classe.
Davanti a questa nuova situazione, cioè alla possibilità di comporre figure ribaltando i triangoli, tornano ad essere messi in gioco i criteri di uguaglianza delle figure e bisogna capire se i triangoli ribaltati sono uguali o no a quelli non ribaltati. In cosa consistono le differenze? Se si guardano gli angoli, e le misure dei lati, i due triangoli dovrebbero essere uguali ma, quando si cerca di sovrapporli non ci si riesce più.
I ragazzi sono come sempre in cerchio intorno al "palcoscenico" e si apre la discussione:

Maestro - (a Donata) *che differenza c'è secondo te tra i due tipi di triangoli, tra quelli faccia e quelli non faccia?*

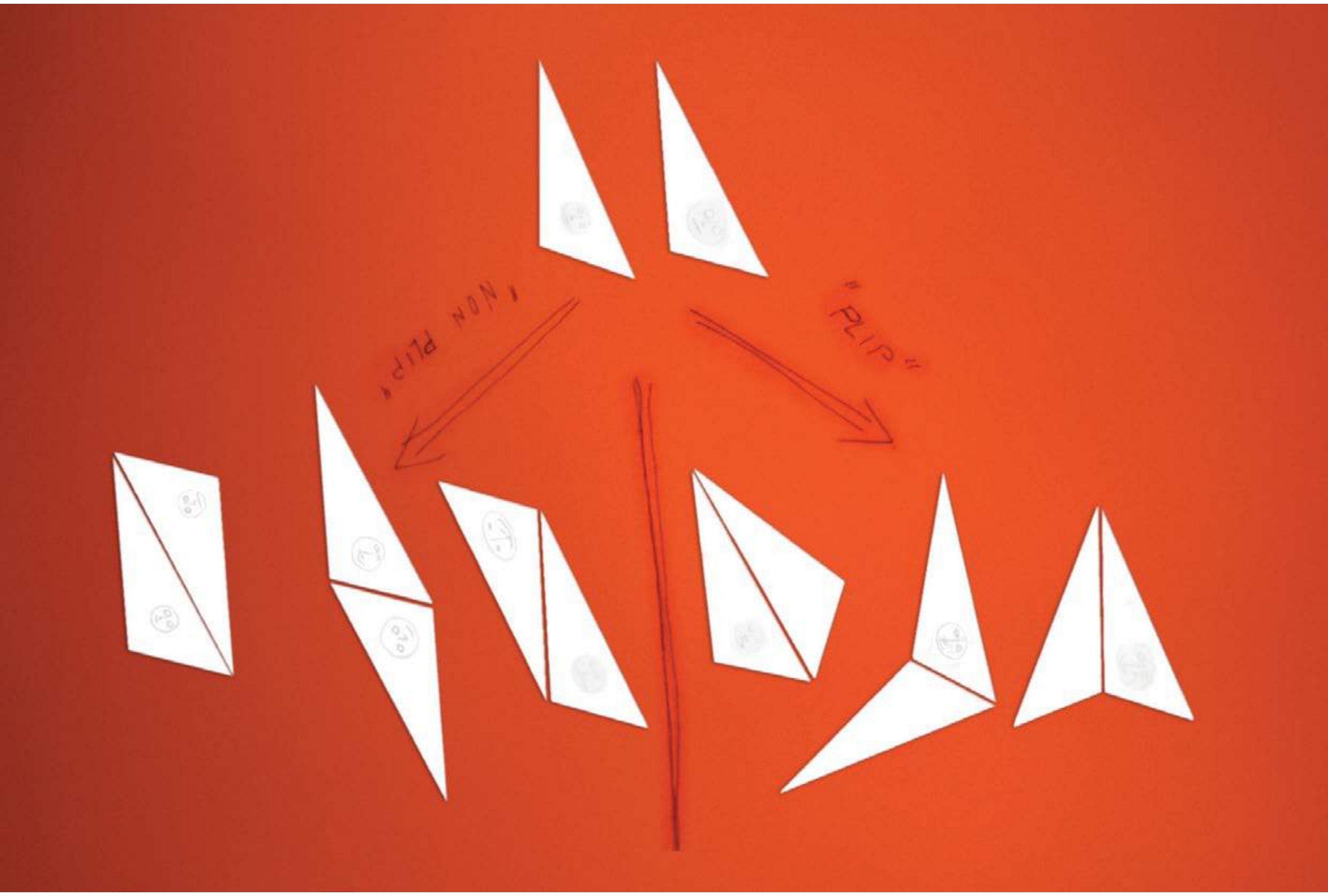


Fig. 109 - Triangoli plip e non plip

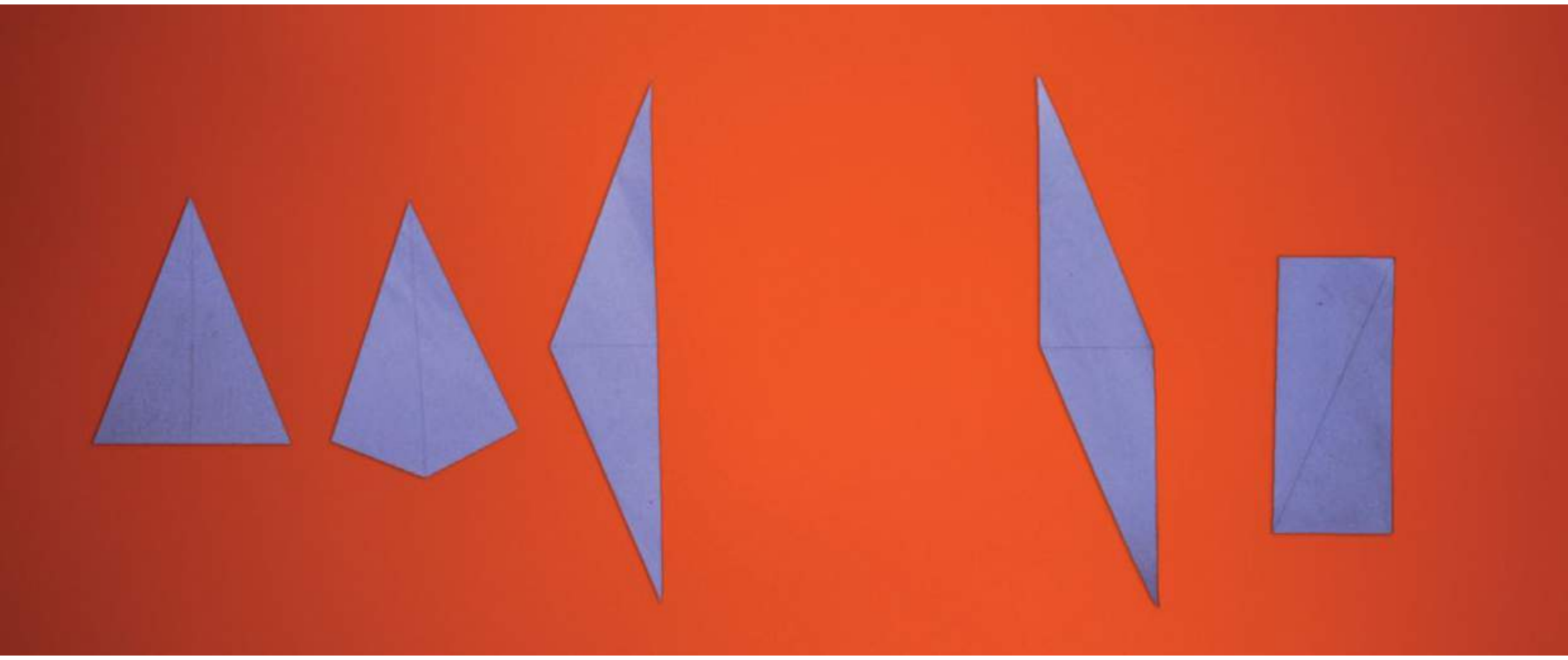


Fig. 110 - Avvicinare e ribaltare

14 - *no, sono uguali*
Maestro - *come fai a dire che due triangoli sono uguali?*
14 - (provando a metterli in tutti i modi) *se sono uguali stanno uno sopra l'altro*
11 - *non sono d'accordo con Donata, sono tutti e due uguali solo che uno è messo in un'altra posizione*
Maestro - *i due con la faccia sono uguali, e posso provarlo. Ma* (ne ribalta uno) *sono uguali anche messi così? Tu hai detto che dipende dalla posizione. In questa posizione sono uguali?*
11 - *sì, sono sempre uguali, solo che uno è girato e l'altro non è girato*
Maestro - *senza rigirarli, vedi se puoi metterli bene uno sopra l'altro, oppure no; in modo che combacino proprio bene. Sopra, non vicino*
5 - *per me, pure se sono messi in qualunque modo, pure se sono girati così, sono sempre uguali. Comunque si potrebbe provare con una riga e con un goniometro, si misurano tutti i lati e gli angoli*
1 - *per metterli bene uno sopra l'altro, bisognerebbe mettere il lato più lungo con quello più lungo, quello più largo con quello più largo, e quello più stretto ancora con quello più stretto ancora. Così si potrebbe vedere se sono uguali*
5 - *sì, ma io non sono molto d'accordo con la tecnica che se li metti uno sopra l'altro sono uguali: si, io lo so che sono uguali, se uno li mette uno sopra all'altro, ma in questi casi, che per me sono sempre uguali, non va bene quella tecnica. Si potrebbe provare pure così: prendiamo questo lato, e va bene, sono uguali come lunghezza, l'altro lato va bene, e poi si vede pure ad occhio*
- se li metti vicini per lato viene il boomerang
1 - *Andrea per provare li ha messi vicini. Io invece dico di ribaltarli.*

Fig. 111 - Composizioni di triangoli

Dunque, quando i triangoli vengono ribaltati, una delle regole trovate per verificare la loro uguaglianza, quella della sovrapposizione, non vale più.
Per indicare il ribaltamento i ragazzi usano la nuova parola suggerita da Raffaella: il plip, da cui ha origine anche il verbo "plippare" che indica l'azione del ribaltare. E si articola la definizione: chiamiamo plip un triangolo che si ribalta e si rovescia dall'altra parte e non- plip quando non si ribalta. Sono stati messi a disposizione nuovi triangoli di varie famiglie e, ribaltando o accostando i triangoli plip e non-plip si compongono diverse figure: le frecce, gli "aquiloni", i "boomerang", vari quadrilateri.

I ragazzi imparano a prevedere cosa succede di volta in volta e, mano a mano che le figure vengono costruite, si sostituiscono le coppie di triangoli con i quadrilateri equivalenti, che vengono disegnati sui quaderni, su altri cartoncini e quindi ritagliati.

Fig. 112 - **113** - Avvicinando (non plip) o ribaltando (plip) triangoli si ottengono diverse forme di quadrilateri

26. Uguaglianze di superficie

Dopo aver discusso sull'uguaglianza dei triangoli plip e non-plip bisogna affrontare il più ampio problema dell' equivalenza tra le superfici delle figure costruite, trovando esempi appropriati e convincenti in modo che i ragazzi, ragionando, possano dare le loro risposte. Emanuela non è affatto convinta che, nonostante le procedure di costruzione, forme diverse possano avere una stessa superficie. I compagni cercano di aiutarla a capire quello che per loro è evidente e le loro argomentazioni, tutte appropriate e interessanti, lasciano intendere che (almeno) loro hanno compreso il problema.

Maestro - *questi sono due triangoli uguali, ed io gli faccio fare il plip, come diceva Marco, e dicevano anche Raffa e Emanuela. Poi sulla figura che abbiamo ottenuto metto quella che ha ritagliata Marco, e che è un quadrilatero formato proprio con questi due triangoli qua. Ora, con questi stessi triangoli faccio un altro plip, su un altro lato, e ancora sostituisco la figura dei due triangoli con una figura intera, anche questa ritagliata da Marco. Sempre con gli stessi triangoli, faccio un altro plip, sull'ultimo lato, e la sostituisco con una figura intera.*
Ora vorrei sapere da voi quale di queste figure è la più grande, e vi chiedo di metterle in ordine di grandezza: controllate se ce ne è una più grande dell'altra o se sono tutte uguali...
- *sono tutte uguali*
- *la prima è più grande*
Maestro - *riguardo a quanto spazio occupano, le figure che abbiamo fatto con i triangoli* (sia plip che non plip) *sono uguali o diverse?*
- *come centimetri quadrati?*
14 - *non lo so dire; hanno tutti lo stesso spazio, perché sono fatti tutti con un solo triangolo, ripetuto in vari modi*
18 - *prima vorrei sapere se questi triangoli sono tutti uguali: allora sono tutti uguali*
15 - *occupano tutti lo stesso spazio*
6 - *anche se i triangoli sono uguali, la figura cambia, non possono occupare tutti lo stesso spazio!*
1 - *senti Emanuela: due più uno quanto fa? Tre. E uno più due? pure tre, quindi vedi che come lo metti...*
6 - *però vedi che cambia il sistema come tu lo dici...*
1 - *e lì cambia il sistema come lo metti, ma è uguale*
Maestro - *allora lo spazio occupato è diverso, anche se è fatto con gli stessi triangoli?*
Maria - *se quella fosse stoffa, e ti ci dovessi fare una camicia, avresti sempre la stessa quantità di stoffa, anche se ha forma diversa?*
- *no, perché quella la devi tagliare*
13 - *vedi che se hai usato sempre gli stessi triangoli, se con questa ti viene una camicia, con l'altra pure ti viene*
10 - *ma è sempre la stessa cosa, l'area è sempre quella, mica se la giro e metto la figura cosi, l'area diventa più grande!*
17 - *se il triangolo ha un area di tre centimetri, e sta in una posizione, con la punta verso l'alto; ora se lo metti con la punta verso il basso, sempre l'area di tre centimetri ce l'ha. Le figure sono tutte diverse, ma formate dagli stessi pezzi*
Maria - *state attenti, non stiamo guardando la forma delle figure, questa volta, stiamo guardando la grandezza, la superficie*
17 - *sì che sono grandi uguali, distribuiti in vari pezzi*
11 - *per me, sono primo secondo e terzo. Il primo è più grande di tutti*
16 - *pensa ai centimetri quadrati occupati*
11 - *non sono grandi uguali, però è una parola!*
Pablito - *per adesso Mayer dice che sono diversi. Poi dirà quale gli sembra più grande*
Maestro - *bisogna metterli in basso sulla lavagna, altrimenti quando si proietta in alto, l'ombra viene lunga in modo diverso*

Pablito - *ma io ho spiegato come ho fatto, però*
3 - *allora sono uguali*
8 - *diversi*
Maestro - *perché diversi?*
8 - *un momento! il terzo, da sinistra a destra, è più piccolo, invece quello è più grande e quello è medio*
Pablito - *volevo fare un altro esempio: se li dovessi colorare, ci vorrebbe la stessa quantità di colore, perché sono fatti dagli stessi triangoli che devi coprire con il colore*
- *dipende da quanto ce ne metti!*
10 - *per me sono tutti uguali perché sono sempre formati dagli stessi triangoli: triangoli uguali, e sempre due triangoli. Volevo dire che l'area è uguale*
1, 2, 4 - *per noi, sono tutti uguali perché sono fatti con due triangoli uguali*
18 - *per me lo spazio occupato è uguale, perché sono fatti tutti e tre con due triangoli. Anche messi in modo diverso. Lo spazio occupato è sempre uguale.*

27. Figure con i lati paralleli

Ricordando tutto il lavoro fatto sul parallelismo, si cerca di individuare i quadrilateri con i lati paralleli. Abbiamo a disposizione quelli disegnati sulle schede, quelli che si compongono sulla lavagna luminosa, varie figure ritagliate ottenute componendo i triangoli non -plip .

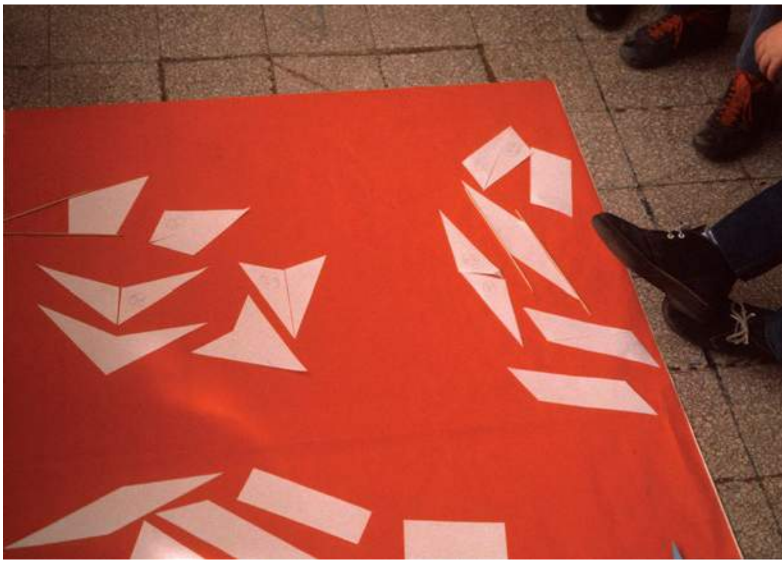


Fig 114 - **115** - Gli stecchini mettono in evidenza i lati paralleli dei parallelogrammi

Pablito - *allora per finire questo discorso che non finisce mai, riguardiamo insieme le figure che abbiamo costruito. Quali di queste figure hanno i lati paralleli?*
- *nessuna*
11 - *solo questa*
Pablito - *e basta?* (indica la figura) *questa è una figura con i lati paralleli?*
Maestro - *quanti lati paralleli ha?*
18 - *come, quanti lati paralleli ha!*
Pablito - *e solo quella figura c'è con i lati paralleli?*
18 - *pure questa* (indica correttamente i lati paralleli)
Maestro - *chi è che non è d'accordo? quanti sono i lati paralleli di quella figura?*
1 - *sono paralleli tutti e quattro*
18 - *ma no: questo è parallelo a questo, e questo è parallelo a questo*

Pablito - *chi è che sa il nome di queste figure con i lati paralleli?*
- *rettangolo, è una specie di parallelogramma*
Pablito - *nessuno sa che hanno un nome ancora più specifico?*
Voci - *rettangolo... triangolo... rettangolo parallelo*
Pablito - *si dice parallelogrammo*
- *parallelepipedo*
13 - *perché grammo?*
Maestro - *perché pesano due etti*
5 - *grammo è come grafia di fotografia.*

28. I perimetri

Sempre alla ricerca delle proprietà delle figure costruite, bisogna definire con chiarezza anche il significato del termine "perimetro" che i ragazzi adoperano senza molta convinzione, spesso in modo sbagliato.
Se le superfici dei quadrilateri ottenuti sono uguali, come è stato faticosamente riconosciuto, perché non dovrebbero essere uguali anche i loro perimetri? Cosa si vede "ad occhio " e cosa si ottiene misurando? Come sempre, anche quelli che hanno capito il problema hanno difficoltà a spiegarlo ai compagni quando i termini non vengono precisati a sufficienza. Infatti Marco sente il bisogno di ribadire il fatto che le figure, guardate per forma, non sono uguali.
Poi, sempre usando il suo sistema di "numeri per capire", diversi da quelli che potrebbe ottenere facendo le misure appropriate, immagina l'uguaglianza della somma dei lati ma dopo poco si corregge dicendo che lo spazio occupato rimane uguale mentre il "bordo" non lo è.
C'è ancora una piccola difficoltà: nel "bordo" bisogna contare anche il lato in comune tra i due triangoli o solo il bordo esterno?

Pablito - *dunque le figure fatte con questi due triangoli sono uguali?*
1 - *le figure no, hanno forma diversa*
Pablito - *e i lati sono uguali, secondo te?*
1 - *sommando che questo è dieci, questo è dieci, questo è dieci, questo è dieci, fa quaranta. Sommando che questo è quindici, questo 25 questo 5, no. messo... potrebbe essere... però sommandoli insieme fa sempre quaranta*
Pablito - *la lunghezza del bordo è la stessa?*
1 - *sommandole insieme credo di si*
Maria - *perché non ci provi?*
10 - *se la superficie occupata è uguale, allora è uguale anche il perimetro*
- *Il perimetro è uguale*
Pablito - *hai opinioni su quello che dice Marco, sulle lunghezze del bordo? i bordi, i confini, i perimetri sono lunghi uguali?*
Maestro - *senza misure, ad occhio!*
1 - (correggendosi) *lo spazio occupato o l'area, rimane uguale, ma il bordo no*
17 - *la distanza tra questo e questo pezzo qui è uguale: questo è uguale a questo: quindi sommando, anche il perimetro è uguale* (però conta anche il lato in comune e guarda il perimetro delle figure intere come somma dei due perimetri dei triangoli)
Maestro - *ma adesso la figura è questa, stiamo guardando questa qui come se i triangoli fossero attaccati, non vicini. Guarda, quale è il perimetro di queste figure?*
17 - *è questo*
Maestro - *e allora la linea in mezzo, questa qui, che c'entra col perimetro?*
17 e 11 - *allora i perimetri non sono tutti uguali, dipende da per quale lato combaciano*
Maestro - *e gli spazi occupati?*
17 - *sono tutti uguali*

29. Dai triangoli ai quadrilateri

Maestro - *abbiamo visto che se mettiamo insieme due triangoli viene un quadrilatero: tu Diego prendi due triangoli, mettili insieme per formare un quadrilatero, e poi cerca tra i quadrilateri già ritagliati se ce ne è uno uguale*

Tutti cercano i vari modi per unire i triangoli e a confrontare la figura ottenuta con quadrilateri "campione", anch'essi disposti sul pavimento, ottenuti a volte ribaltando i triangoli a volte no. Leo con moltissima esitazione nel girare e mettere vicini i triangoli fa un quadrilatero diverso da quello di Diego, Max ne forma ancora uno, Donata ne compone un'altro, ma non riesce a trovarne uno già fatto uguale al suo.

Maestro - *visto che non riesci a trovarlo così, come potresti fare per avere una risposta?*

Allora Donata cambia strategia: prima si trova un quadrilatero campione poi trova i triangoli giusti per ricoprirlo, poi li toglie, riforma il quadrilatero e lo mette vicino al modello.
Tutti hanno costruito i loro quadrilateri, ora si tratta di metterne in evidenza somiglianze e differenze, raggruppandoli per tipi e trovando per loro dei nomi appropriati.
Si riportano sul quaderno le figure ottenute col ribaltamento o senza il ribaltamento dei triangoli, e intanto si cerca di caratterizzare meglio le famiglie di quadrilateri... Ritornano alcuni dei problemi che erano stati posti discutendo sul parallelismo, e si applicano le conclusioni ai quadrilateri che si vanno costruendo. La composizione di triangoli, infatti, porta a figure di cui bisogna trovare un nome e di cui bisogna scoprire le proprietà. Proprio ragionando su queste proprietà anche i quadrilateri possono essere riuniti in famiglie.

Paolo - *abbiamo visto che Debora aveva fatto sei quadrilateri diversi : si possono dividere in tre di un tipo e tre di un altro tipo? Possiamo riunirli in famiglie?*
16 - *per me questi si possono plippare e quelli no. E poi aspetta: questi hanno un solo triangolo con la faccia e gli altri ne hanno due; potrebbero pure averne zero!*

Fig 116 - Dai triangoli, i quadrilateri con o senza i lati paralleli

Maria - *Max vorrebbe distinguere questi quadrilateri in due famiglie. Perchè?*
- *ha visto i lati paralleli*
- *questi qua hanno i lati paralleli e gli altri no*
10 - *i plip non sono paralleli, non hanno linee parallele, e i non plip hanno linee parallele.*
11 - *ce ne è un'altro che ha le linee parallele*
14 - *forse i paralleli sono questi qua che hanno le righe che non si incontrano, che vanno dritte, e i non paralleli sono quelli coi lati che si incontrano*
Maestro - *metti questi due stecchini sui lati che ti sembrano paralleli.*
1 - *ma lo sai che vuoi dire parallelo*
- *devono essere paralleli tra loro, servono due stecchini.*

30. Non sempre parallelogrammi

Per caso o per fortuna, si presentano nuovi casi che non rispondono alle regole trovate.. Per esempio, la figura costruita "plippando" su due dei suoi lati un triangolo rettangolo si comporta in modo strano, si formano dei triangoli e non i quadrilateri che i ragazzi si aspettavano; ribaltando un triangolo isoscele invece si ottiene un quadrilatero con i lati uguali. Leo e Massimo si accorgono di queste stranezze, il maestro riprende in modo problematico le loro osservazioni, non tutti trovano rapidamente una spiegazione mentre altri risolvono facilmente il problema.

13 e 10 - *come mai con due triangoli rettangoli, girandoli, fanno plip, e viene un triangolo?*
Maria - *Massimo sta dicendo che quando gli è capitato un triangolo di questo tipo, e ha fatto plip su questo lato, non gli è venuto un quadrilatero, ma un altro triangolo*
15 - (lavorando con due isosceli) *questo sarebbe un quadrilatero tipo plip, però non è perfetto perché in genere servono due triangoli con la faccia per fare un quadrilatero, e questo non è perfetto perché il triangolo con la faccia o senza faccia viene uguale* (il quadrilatero è composto da due triangoli, sia con sia senza ribaltamento)
Maestro - *anche noi prima avevamo visto che i triangoli che plippano non fanno figure con i lati paralleli. Invece questo qui, che è fatto con due triangoli che hanno i lati uguali, quando plippa fa una figura con i lati paralleli. Come mai?*
1 - *perché ha tutti i lati uguali*
12 - *mi sa che l'angolo gli combaciava; non lo so, ma è l'angolo retto, e allora ti viene una linea retta, perché la base è pari*
Maestro - *è un triangolo diverso, a me sembra, ma hai ottenuto un triangolo o un quadrilatero? un tre lati o un quattrolati?*
6 - *quattro, perché uno due tre e quattro*
Maestro - *a me sembrava tutta una linea quella!*
Pablito - *il maestro dice che se unisci bene quei due triangoli viene una linea retta*
Maestro - *ha ragione Pablito e ha ragione Emanuela, sono io che ci vedo male, però io volevo vedere come tu trovavi che era diverso, e se stavano o no sulla stessa linea, non Pablito*
Pablito - *lei li vedeva come due linee diverse*
6 - *a occhio! ho cambiato triangolo: questi sono due triangoli e insieme fanno una figura a quattro lati*
Maestro - *ora stai lavorando su questo lato*
6 - *adesso lo sposto, e lo metto in un altro modo; così lo ho girato e va bene*
Maestro - *se è vero quello che dici, questo dovrebbe succedere anche con gli altri lati, che ogni lato girato mi dà delle altre figure: proviamo; mica è detto*
11 - *siamo a scuola per imparare*
Maria - *dunque può succedere che con alcuni tipi di triangoli, questa operazione del plip e non plip dà risultati strani: anche questi di Emanuela, per esempio sono due triangoli che se messi vicini, non fanno un quadrilatero ma fanno un...*
- *trilatero*

- *per forza, sono rettangoli.*
1 - *io poi vorrei dire, per quei triangoli rettangoli, questo non viene un quadrilatero perché hanno un angolo retto, e viene dritto questo pezzo, per cui se le unisci, due linee dritte non fanno mica un angolo. Forse assomiglierebbe di più a questo, o a questo; se questi fossero ad angolo retto, sarebbero uguali a un triangolo*
17 - *invece questi sono tutti quadrilateri.*

Fig. 117 - Il triangolo isoscele che non rispetta la regola

31. Parallelogrammi

Date le modalità di costruzione, unendo triangoli (non rettangoli, come abbiamo visto) si ottengono i parallelogrammi che Marco chiama "rettangoli irregolari". Molti notano che quadrilateri non - plip hanno i lati paralleli che sono anche uguali per lunghezza. Anche le frecce e i boomerang hanno i lati uguali ma non paralleli: bisogna quindi precisare i criteri di classificazione in modo da riuscire a definire la nomenclatura corretta. E grazie all'osservazione di Max si cominciano a guardare anche gli angoli che, nei rettangoli, devono proprio essere retti, cioè essere sovrapponibili all'angolo retto campione, quello della squadra.
Le esigenze di Marco, che non si lascia facilmente convincere ad accettare un nome per le sue figure se prima non ne ha definito le caratteristiche, vengono infine rispettate ma lo stralcio di discussione riportata può dare un'idea di quali e quante difficoltà dei bambini vengono trascurate da un insegnamento sbrigativo che chiede loro soltanto di imparare a memoria i nomi delle diverse figure elencati su una pagina di sussidiario.

Maria - *abbiamo visto che mettendo vicini due triangoli possiamo costruire tante figure diverse: spesso dei quadrilateri e qualche volta possono venire dei triangoli. Se si mettono due triangoli col plip viene boomerang o aquilone o freccia, ma se mettiamo insieme due triangoli senza fare plip*

vengono delle figure con i lati paralleli. Come possiamo chiamarle queste figure con i lati paralleli?
- *quadrati, rettangoli, parallelogrammi*
- *li possiamo chiamare quadrilateri con i lati paralleli*

1 - *nelle due famiglie si fanno due generi di quadrilateri: nella famiglia dei plip come a freccia e boomerang, e gli altri come due tipi di rettangoli*
Maestro - (a Marco) *perché li chiami rettangoli?*
1 - *perché hanno forma di rettangolo, rettangoli irregolari*
Maestro - *in che cosa la loro forma assomiglia a un rettangolo?*
1 - *che hanno i lati paralleli, i rettangoli*
Paolo - *guarda se questi "rettangoli irregolari" hanno i lati uguali oppure no. Anche quelli plip ce li hanno uguali?*
1 - *sì, perché questo è dieci, e questo pure è dieci, questo è venti, e questo pure è venti, uguali ce li hanno, i lati*
14 - *in ogni figura, anche nei quadrilateri col plip, ci sono due lati uguali*
1 - *questo e questo, anche in questi altri, solo che oltre ad essere uguali, sono paralleli, sono paralleli tra loro. I plip non fanno lati paralleli*
Maestro - *i lati uguali, come sono messi in questi a freccia?*
16 - *là si incrociano, nei plip, i lati uguali; in questi altri non si toccano mai, sono quelli che sono paralleli, oltre che uguali*
Maria - *concludiamo: i nostri triangoli si possono unire due a due a formare quadrilateri. si formano quadrilateri a forma di freccia o aquilone se si fa il plip (ribaltamento). I quadrilateri formati col plip hanno lati uguali che si incrociano. Unendo i triangoli senza plip (senza ribaltamento) si formano quadrilateri con i lati uguali che non si toccano mai: i lati uguali sono paralleli. I triangoli rettangoli plip, uno rispetto all'altro, possono formare un triangolo, i triangoli con due lati uguali possono fare un quadrilatero sia col plip che senza il plip*
1 - *se dici tipo freccia, devi dire anche tipo rettangolo, ce ne sono due tipo freccia e due tipo rettangolo. Non sono propriamente rettangoli, perché il vero nome lo ha detto Pablito - si chiamano parallelogramma*
Maestro - *allora quelli che hanno i lati paralleli, li chiamiamo parallelogrammi?*
1 - *rettangoli parallelogrammi*
Maestro - (mostrando un rettangolo) *Marco, questo è un rettangolo o no?*
1 - *è un rettangolo normale*
Paolo - *un rettangolo è anche un parallelogramma o no? è come dire: se tu sei un uomo sei anche un mammifero?*
5 - (guardando un parallelogramma) *si, ma quello sembra come distorto, diciamo*
1 - *nel rettangolo normale è compreso pure che sono paralleli i lati, credo*
16 - *ma questo ha un angolo retto, quello non lo ha retto*
Maria - *allora possiamo chiamare parallelogramma generico quelli che hanno i lati paralleli e gli angoli qualsiasi, e chiamiamo parallelogrammi rettangoli, quelli che hanno i lati paralleli e gli angoli retti*
1 - *per vedere se nella famiglia dei parallelogrammi ci sono pure i rettangoli, bisogna fare la prova dell'angolo retto, si confronta con quello della squadra.*

32. I tagli

Una volta fatta la prova dell'angolo retto sembra che la classificazione dei parallelogrammi in rettangoli e non rettangoli sia chiara. I ragazzi uniscono i vari triangoli con dello scotch in modo da formare dei parallelogrammi stabili, ne riportano i contorni sul quaderno e sul cartoncino, ritagliano i parallelogrammi interi che vengono disposti in mezzo al cerchio. I gesti delle mani che uniscono, sovrappongono, ribaltano, avvicinano e allontanano le diverse figure rappresentano uno stimolo importante sia per rendersi meglio conto delle cose dette sia per porre nuovi problemi.

Fig. 118 - Tagli su parallelogrammi

Infatti, guardando rettangoli e parallelogrammi Marco commenta:

1 - *in questi parallelogrammi, il pezzo che avanza dovrebbe essere attaccato là. Si può dire che ha l'angolo in più o in meno rispetto a quello retto, dipende da dove lo stai guardando: questo ha un pezzo in più, quest'altro, se lo guardo da qui ha un pezzo in meno. Questo qui è proprio esatto il pezzo, questo pezzo si potrebbe aggiungere qui: questo è venuto bene, forse lo avete fatto proprio apposta voi: questo pezzo si potrebbe aggiungere qui, e diventa più grande e qui ti viene già l'angolo retto, bisogna riconoscere l'angolo retto*
11 - *i parallelogrammi non sono quelli che hanno gli angoli retti!*
Maria - *questa dei parallelogrammi è tutta una famiglia, possiamo dividerla però in due sottogruppi, si può prendere la sottofamiglia guardando se oltre ad avere i lati paralleli, ha anche gli angoli fatti ad angolo retto*
1 - *il rettangolo normale, ha i lati paralleli e l'angolo retto, il parallelogramma sarebbe solo una specificazione che non ha l'angolo retto: pure se la parola non assomiglia per niente ad un angolo retto.*

Una volta trovato l'accordo sulle definizioni si può chiedere un lavoro individuale di verifica che, contemporaneamente, porti tutta la classe a fare un nuovo passo avanti. Bisogna infatti far condividere il ragionamento di Marco che ha intuito come, con i tagli appropriati, si possano trasformare i parallelogrammi in rettangoli equivalenti.

Maestro - *ad ogni coppia di ragazzi viene dato uno dei questi quadrilateri interi, fatti sempre con i due triangoli, e un foglio su cui bisogna ricopiare il quadrilatero che è stato dato. La domanda è questa: come si fa, facendo un solo taglio, se è possibile, o al massimo due, ad avere dei pezzi che poi rimessi insieme fanno un rettangolo?*

A Max tocca il quadrilatero a boomerang, e ne è assai poco soddisfatto.
Dopo pochissimo tempo il piacere di lavorare insieme prende il sopravvento sulla riflessione individuale e si discute su quali modi di tagliare i quadrilateri siano più opportuni.

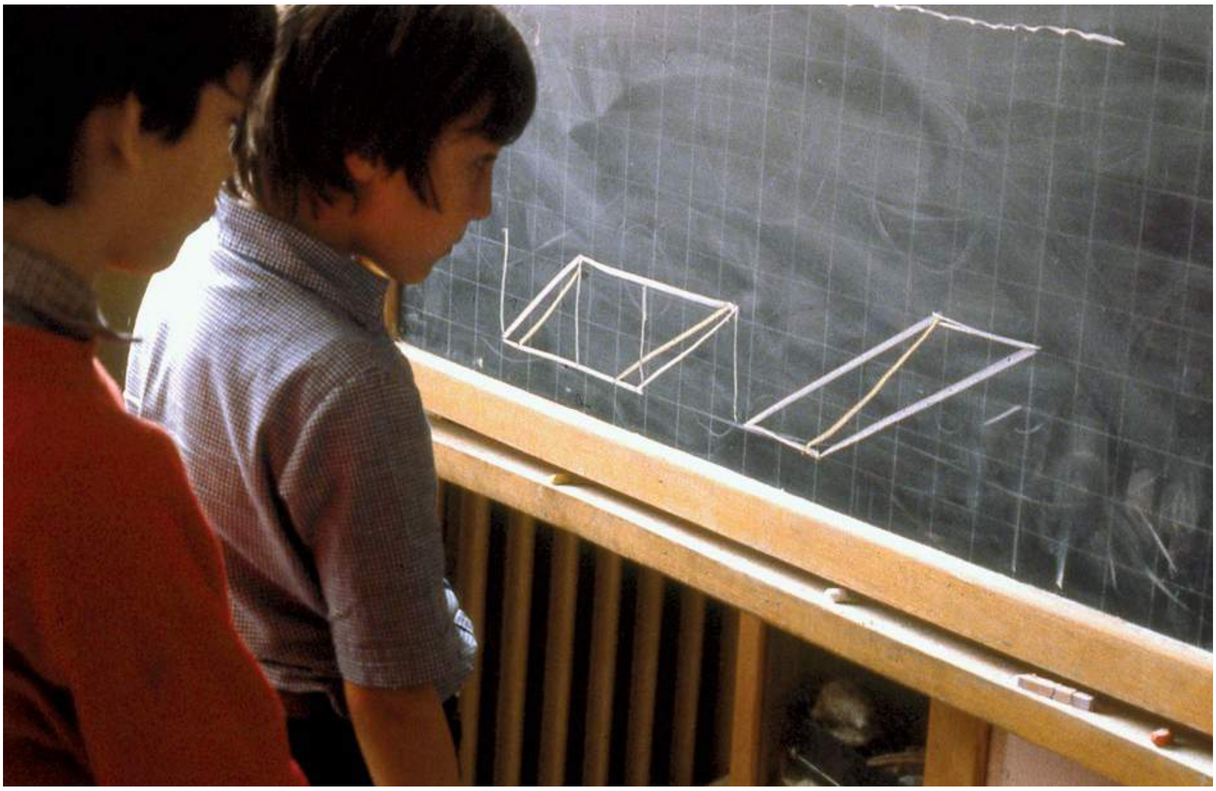


Fig. 119 - Scomposizione di quadrilateri

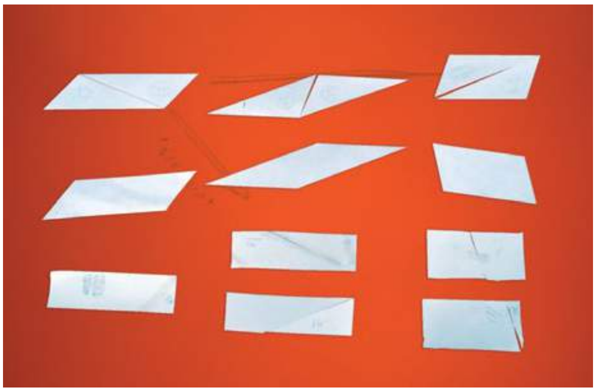


Fig. 120 - Ricomposizione dei rettangoli dai parallelogrammi

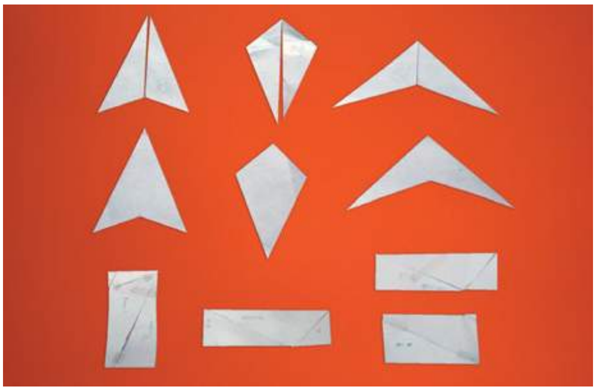


Fig. 121 - Ricomposizione dei rettangoli dagli aquiloni

Ora il maestro vuole provare lui a tagliare una figura. Sarà capace? Si colgono la tensione e le aspettative nell'attesa che il maestro faccia il taglio "giusto" per costruire il rettangolo ed è anche interessante notare come riaffiorino, con molta maggior padronanza e talvolta in modo provocatorio, i ricordi delle precedenti discussioni sul "dritto". La sfida è coinvolgente e tutti guardano ansiosamente il maestro che, con appropriata suspence, si accinge a fare un unico taglio sul parallelogramma. Intanto i ragazzi discutono:

- *io ci riesco con tre tagli*
- *io con uno*
- *a me, qualsiasi mi dai, un taglio e te lo faccio*

Maria - *se faccio un taglio qui,* (a metà del parallelogramma) *viene un rettangolo?*
8 - *se fai un taglio lì non viene un rettangolo, perché prima avevamo detto che si doveva tagliare più all'angolo e non in mezzo alle due righe!*
16 - *ma no, guarda che lo puoi tagliare da ogni parte da qui, a qui, dove ti pare*
Maestro - *taglio qui, ma come devo tagliare?*

Tutti - *dritto!*
Maestro - *per favore senza gridare*
13 - *ma lui ci fa soffrire!*
- *scommetti che se taglia così non viene?*
- *viene!*
- *è venuto!*
16 - *è vero che poteva tagliare in un posto qualunque qua in mezzo, però non fuori di qua e non fuori di là*
3 - *io ho fatto un taglio semplicissimo, l'ho tagliato in un modo qualsiasi*
Maria - *vi sembra che ha tagliato in un modo qualsiasi o in un modo speciale?*
2 - *per me lui ha tagliato dritto*
3 - *certo, in un modo speciale, perché se io tagliavo per così non mi veniva niente! Bisogna tagliare dritto*
- *tagliare* ***retto****!*
10 - *e che significa dritto?*
1 - *retto a cosa?*
18 - *mi pare che sia la stessa cosa dire tagliare dritto o tagliare retto*
14 - *non mi pare che sia la stessa cosa, perché dritto puoi tagliare pure diagonalmente, tu fai una riga dritta!*

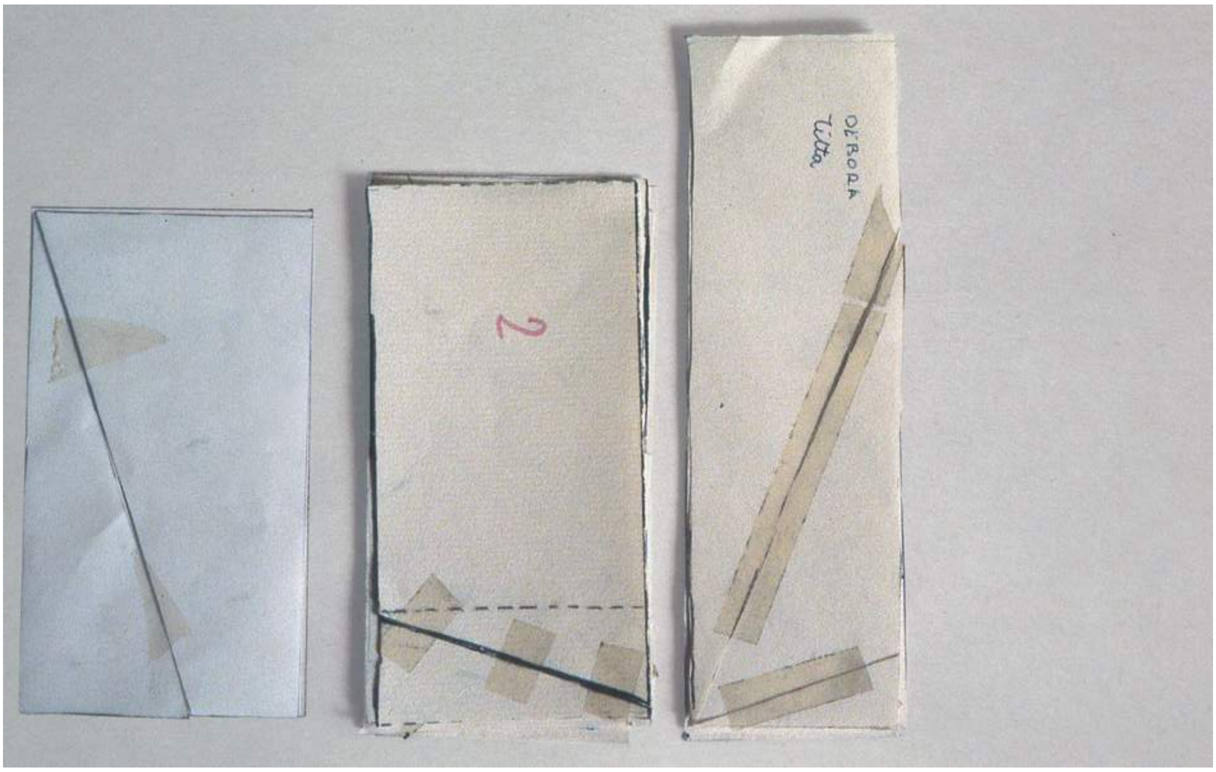


Fig. 122 - Lavoro a coppie. Tagli e ricomposizioni per ottenere rettangoli

33. I rettangoli

Le figure costruite in tutti questi giorni, i vari parallelogrammi, i rettangoli ottenuti con i tagli, eventualmente ricalcati sul cartoncino e nuovamente ritagliati, sono sotto gli occhi di tutti. Servono ancora delle precisazioni sulla nomenclatura e nella discussione si riassumono le diverse proprietà dei rettangoli. La domanda del Pablito sulla uguaglianza degli angoli in rettangoli diversi, tende a chiarire, ancora una volta che la lunghezza dei lati non ha alcuna rilevanza sulla apertura dell'angolo ma il bisogno di una prova concreta, cioè del confronto degli angoli tra le figure ritagliate nel cartoncino, prova quanto certi aspetti percettivi prevalgano, talvolta inaspettatamente, su conoscenze che dovrebbero essere orami acquisite e stabilizzate.

11 - *sono quadrilateri tutti quanti*
8 - *sono come ha detto Mayer: quadrilateri rettangoli*
Maestro - *e che significa?*
8 - *quadrilateri che hanno quattro lati, e rettangoli che sono retti*
Maestro - *che cosa è retto*
1 - *che sono di 90°*
Maria - *che cosa sono retti?*
1 - *gli angoli*
Maestro - *tu che vuoi dire?*
15 - *che hanno gli angoli tutti uguali*
14 - *gli angoli tutti uguali, che hanno gli angoli retti*
Pablito - *ma quanti sono gli angoli di questo rettangolo*
- *quattro*
Pablito - *e sono uguali ai quattro angoli di quest'altro rettangolo, per esempio?*
14 - *voglio dire, non lo so*
Pablito - *come possiamo provare? prova con questi rettangoli bianchi che sono più resistenti: uno ha i lati più lunghi e uno più corti: hanno gli angoli uguali?*
14 - *forse sì*
Maria - *come faresti ad esserne sicura?*
16 - *deve confrontare quei due*
Pablito - *ora quali angoli stai confrontando? ti vengono uguali facendo questa prova?*
14 - *sì*
Pablito - *allora se questa è una prova buona, i rettangoli con i lati più lunghi o più corti hanno gli angoli uguali. Che altro hanno in comune questi rettangoli?*
- *linee parallele*
16 - *se sono rettangoli, le linee parallele ce le devono avere per forza*
17 - *tutti quadrilateri*
Pablito - *ricordate che questi due sono stati costruiti con gli stessi triangoli*
17 - *anche l'area è uguale*
5 - *mannaggia! Lo stavo dicendo io*
Pablito - *bisogna essere d'accordo che tutti hanno la stessa area, se no oggi non possiamo lavorare*
5 - *hanno tutti la stessa area perché tutti questi rettangoli sono stati fatti da una forma trovata così, da due triangoli, e questi due triangoli, sempre secondo lo stesso ragionamento che facevamo pure ieri, se io lo metto così, o così, o così, l'area è sempre la stessa*
Pablito - *se le figure sono fatte dagli stessi pezzi, rimessi in posizioni diverse, è giusto che abbiano la stessa area?*
14 - *certo! sono sempre gli stessi pezzi!*

Queste discussioni, che possono apparire ripetitive, hanno invece una enorme importanza didattica, perchè permettono un continuo "andirivieni" tra aspetti percettivi e aspetti cognitivi. Su quello che gli occhi vedono e le mani toccano si fonda l'esperienza concreta che serve a costruire e a stabilizzare nella mente i diversi modelli di figure geometriche, ciascuno con un proprio nome che esprime ben precise caratteristiche. Si sostiene così l'astrazione necessaria per le procedure di classificazione in cui il processo avviene in senso inverso: il modello mentale, definito dal nome corrispondente, per esempio "rettangolo" serve per raggruppare o "mettere insieme" tutte le figure in cui è possibile riconoscere le caratteristiche presentate dal modello.
Come sapere se le aree dei vari rettangoli sono tutte uguali? Cosa si conta per stabilizzare l'idea delle uguaglianze delle superfici si distribuiscono fogli di carta a quadretti su cui sono disegnati i rettangoli costruiti da coppie di triangoli. Alcuni contano i quadratini unitari in cui i rettangoli sono stati scomposti. Ma qualcuno riesce a eliminare la fatica del conteggio moltiplicando direttamente il numero

di centimetri in cui ha diviso la base per il numero di centimetri in cui ha diviso l'altezza nonostante inevitabili errori di calcolo e imprecisioni di misura i valori risultano pressappoco uguali per tutti.
In classe le attività continuano con successive richieste e approfondimenti.
Così, dopo aver trovato le caratteristiche comuni ai rettangoli costruiti con le coppie di triangoli, Pablito invita a cercare le differenze tra i tre tipi di rettangoli ottenuti accostando di volta in volta i triangoli su un lato diverso. I giochi di composizione, sia pure nella loro concretezza, non sono facilissimi e l'occhio spesso inganna. Mettere d'accordo gli aspetti percettivi con le conoscenze acquisite - sempre più fragili rispetto a quello che sembra di vedere con gli occhi non è facile. Per questo, avvicinandoci alla conclusione del lavoro, è importante ripetere, ribadire, provocare, chiedere prove che confermino la stabilità del percorso fatto. Si ripresenta, nella ricerca delle somiglianze, anche la parola perimetro su cui bisogna ancora discutere.

Pablito - *qualcuno vede quanti tipi di rettangoli ci stanno su questo foglio? Perché alcuni sembrano uguali, quasi uguali...*
- *tre tipi mi sembrano*
5 - *a me sembrano due*
Pablito - *Emanuela, ci raggruppi quelli uguali?*
1 - *ma uguali cosa, nell'area?*
Pablito - *uguali, uguali identici, che si possono mettere l'uno sopra l'altro*
6 - *faccio un pò di prove*
5 - *e dovrebbe essere uguale pure il perimetro*
Pablito - *un momento!*
1 - *no, il perimetro cambia.*

Dunque, sembra che il problema della disuguaglianza dei perimetri sia, per alcuni, risolta. Ma ricordando le modalità di costruzione dei quadrilateri, le domande a cui adesso vogliamo tentare di rispondere sono sostanzialmente queste due: siamo sicuri che le figure costruite con gli stessi triangoli hanno la stessa area?
E che i rettangoli costruiti tagliando e ricomponendo i parallelogrammi hanno la stessa area? Per rispondere basta la "logica" o sono necessarie delle misure?

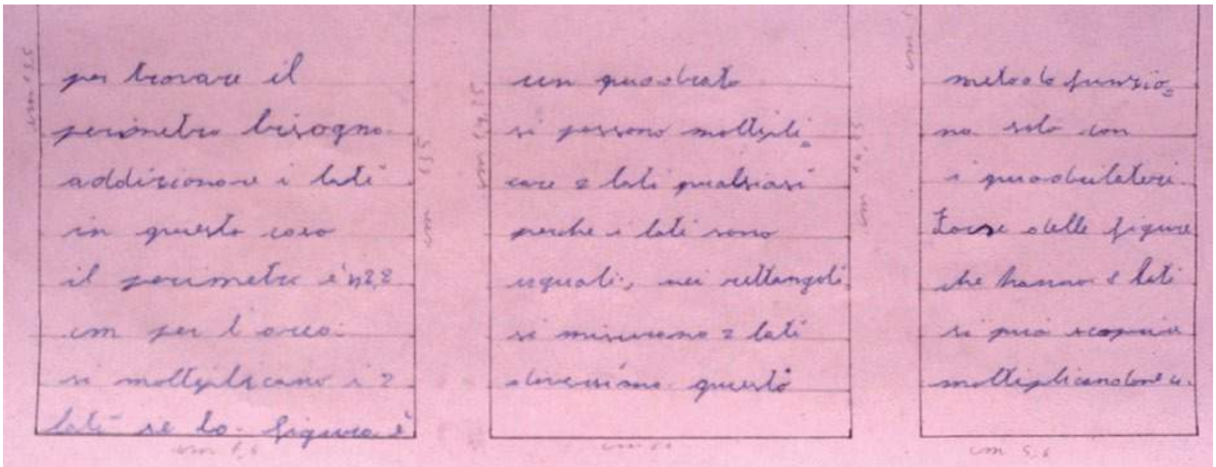


Fig. 123 - Come trovare il perimetro e l'area dei rettangoli

34. Tagliare i quadrilateri

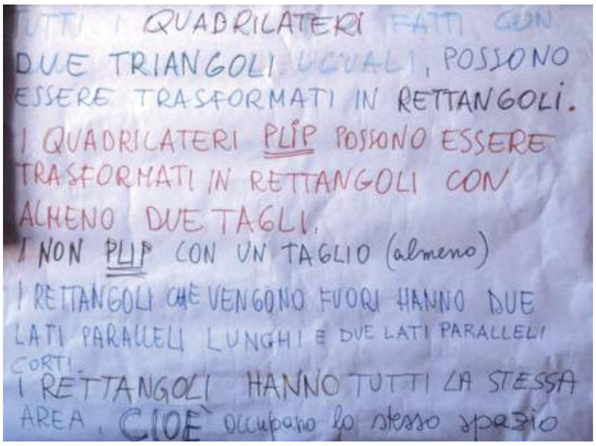


Fig. 124 - Il cartellone con la regola

Maestro - *bisogna vedere di tirare fuori qualche conclusione importante da tutto questo lavoro. Ricapitoliamo quello che abbiamo fatto. Abbiamo qui tutti i quadrilateri: due triangoli uguali messi vicini fanno un parallelogrammo, anzi, fanno un quadrilatero freccia, aquilone o boomerang se si mettono vicini con plip; e un parallelogrammo se si mettono vicini senza rovesciarli. Poi, come ha fatto Raffaella, da un parallelogrammo, con un taglio solo, si fa un rettangolo. Questo è stato tagliato così e messo di qua. Abbiamo visto che non c'è un modo solo di fare un taglio: potevamo fare un taglio a metà e mettere i due pezzi vicini. Sara poi aveva questo quadrilatero qui, lo ha tagliato in due, poi ha rimesso i pezzi uno vicino all'altro, poi ha detto che se tagliava questo pezzettino e lo metteva di qui veniva un rettangolo*

1 - *solo che aveva perso tempo, ha perso un taglio*

Paolo - *questi rettangoli che avete ottenuto, hanno la stessa forma o no?*

1 - *si, più o meno, sempre rettangoli*

8 - *uno è spilungone, uno un pò più largo...*

2 - *embè, non sono sempre rettangoli?*

1 - *sono rettangoli però hanno diversa forma*

11 - *la massa occupata è sempre la stessa*

Maestro - *come?*

11 - *niente*

Maestro - *sono rettangoli di diversa forma?*

11 - *il nome è sempre lo stesso, rettangoli, però cambia la forma*

Maria - *e che cosa ci hanno di uguale, oltre il nome?*

- *il nome*
- *la forma*
- *il numero dei lati*
- *i lati che sono paralleli*

15 - *i lati sono diversi, non hanno la stessa misura*

Paolo - *per avere questo rettangolo qui, io ho preso due triangoli, li ho uniti per fare il parallelogramma, lo ho tagliato, ho messo i pezzi vicini, e lo ho fatto diventare rettangolo. Allora cosa c'è di uguale tra parallelogramma e rettangolo?*

3 - *tutto*

Maestro - *come tutto? hanno la stessa forma?*

11 - *l'area*

Paolo - *sì, parallelogrammo e rettangolo hanno l'area uguale, lo spazio occupato è sempre lo stesso, perché non ho fatto altro che ritagliare pezzi e rimetterli vicini in un altro modo*

15 - *è lo stesso, lo hai rigirato, lo hai ritagliato, lo hai tagliato ancora...*

Maestro - *per questo vale la risposta di Leo che dice che è sempre lo stesso: vuol dire che è sempre lui, tagliato in vari modi . Però non puoi dire "lo stesso" perché apparentemente non è lo stesso: hanno solo la stessa superficie*

14 - *vedi che non sono uguali, perché neanche questi rettangoli li posso mettere l'uno sopra l'altro, però sono fatti a partire da pezzi che sono sempre gli stessi, così hanno la stessa area, o superficie*

Paolo - *ora ci sono questi qui, fatti con i quadrilateri non parallelogrammi. Anche questi sono diventati rettangoli*

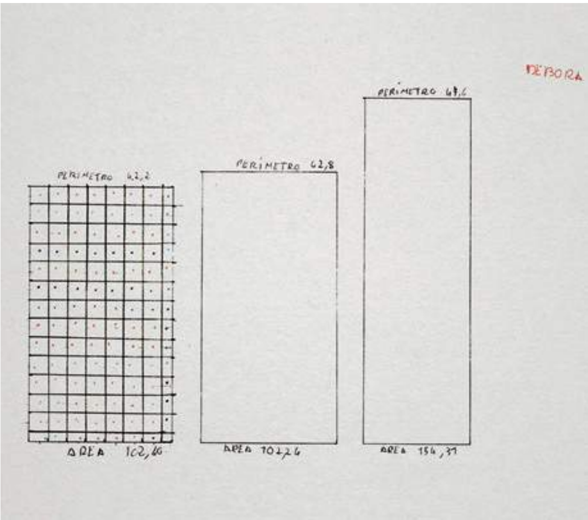
16 - *però sono diventati rettangoli facendo più di un taglio*

5 - *due tagli al massimo, se uno non sbaglia taglio*
Paolo - *questi qui anche diventano rettangoli con due tagli. Mayer e Leo hanno fatto due tagli sullo stesso boomerang, ed hanno trovato due rettangoli diversi, però l'area è sempre uguale*
Pablito - *scriviamo la conclusione*
5 - *tutti i quadrilateri possono ritornare in rettangoli*
Pablito - *noi non lo abbiamo fatto su tutti i quadrilateri, però lo abbiamo fatto su questi nostri Possiamo scrivere sul cartellone:*
tutti i quadrilateri fatti con due triangoli uguali possono essere trasformati in rettangoli. i quadrilateri di tipo plip con due tagli quelli di tipo non plip con un taglio solo.

Riassumendo la discussione sulle superfici si conclude:
Ognuno dei due triangoli uguali che formano un quadrilatero ha una superficie che è la metà di quella del quadrilatero ed è anche la metà di quella del rettangolo che può essere ottenuto dal quadrilatero con uno o due tagli.

35. Perimetri e aree dei rettangoli

Anche ripetendo e riassumendo più volte le procedure impiegate per la costruzione dei rettangoli restano incomprensioni e dubbi non ancora risolti. Sembra impossibile che figure con la stessa superficie possano avere diverso perimetro ed anche affidandosi alla percezione l'occhio spesso imbroglia.
Ognuno riceve quindi un foglio su cui sono riportati tre rettangoli ottenuti dalla composizione di due triangoli uguali e si ricomincia con la solita domanda:



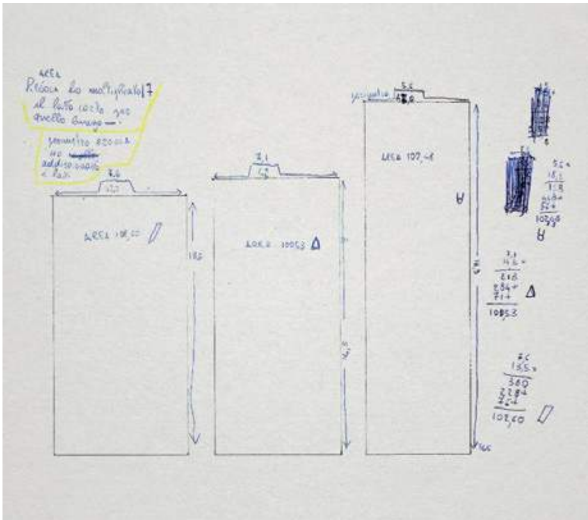


Fig. 125 - **126** - Calcolare le aree e i perimetri dei rettangoli composti dagli stessi due triangoli

Maestro - *abbiamo costruito questi rettangoli unendo in modi diversi due triangoli uguali, mi aspetto che la somma delle lunghezze di tutti i lati di questi tre rettangoli, per tutti e tre, venga uguale? il perimetro insomma è uguale?*
14 - *forse si*
Pablito - *faccio io un'altra domanda: siccome sapete che hanno l'area uguale, che cosa si può fare con le lunghezze del lati per controllare che l'area è uguale? questo lo sanno quasi tutti*
1 - *fai lato per altezza*
Pablito - *voi dovreste scrivere qui, dentro ogni rettangolo, secondo voi quanto è l'area in numero, e che operazione avete fatto per trovarla. Qui sopra invece scrivete quanto è lungo il perimetro: così leggendo numeri uno capisce se l'area è la stessa per tutti e come è il perimetro.*

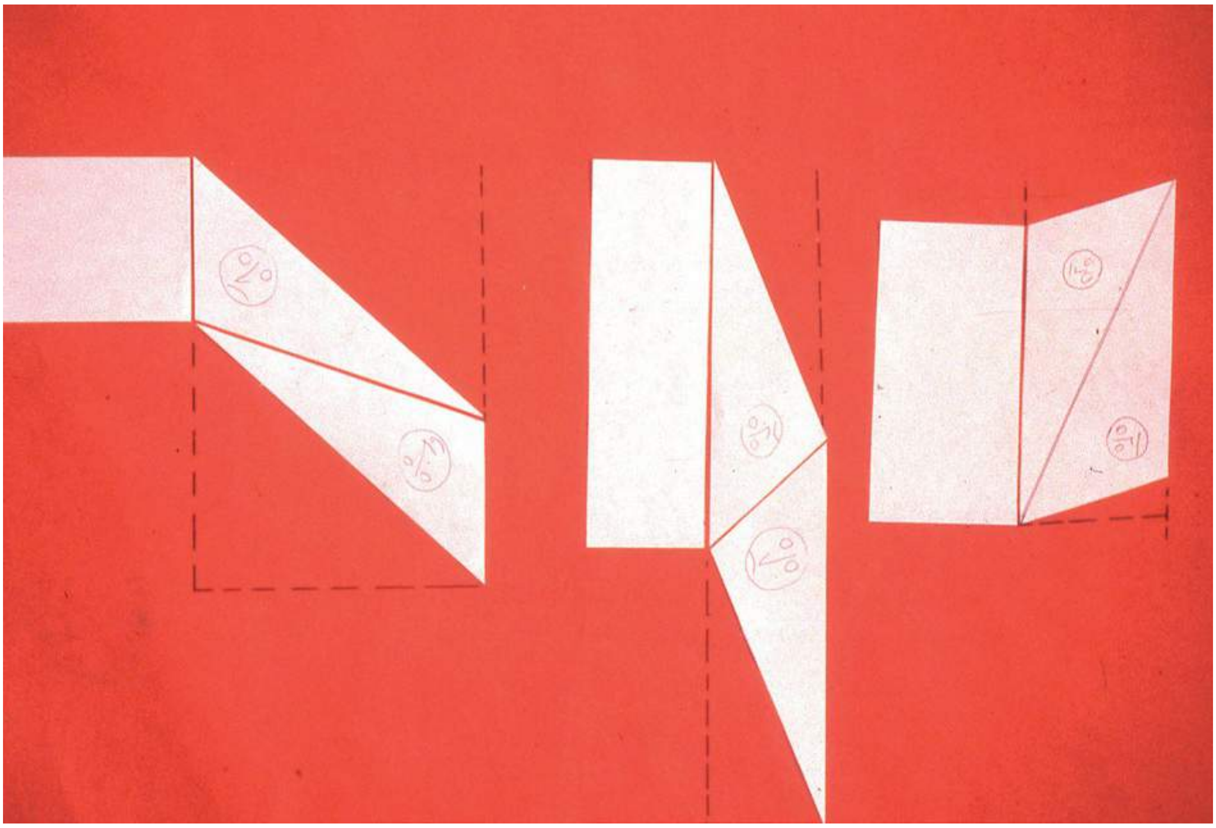


Fig. 127 - Rettangoli composti da coppie di triangoli

Dopo che i ragazzi hanno fatto le loro misure Pablito prende un foglio e legge prima le misure dei perimetri: 42,1 47,8 49 e poi quelle delle aree: 102,2 101,5 101,9. Purtroppo i dati ottenuti sono abbastanza ambigui e non orientano con chiarezza verso la soluzione. É molto interessante notare come il Maestro, che ha sempre insistito con i suoi ragazzi sulla importanza di raccogliere dati, misurare, confrontare con un campione... e basarsi sui propri risultati prima di fare qualunque affermazione, questa volta, davanti a dati non significativi, insista sulla necessità logica che deriva dalla procedura seguita: i perimetri devono essere diversi. D'altra parte, come spiega bene Donata, anche facendo le misure possono capitare una quantità di errori, ed è interessante l'elenco di tutti quelli possibili: se non si hanno delle aspettative ben fondate logicamente non ci si può fidare nemmeno delle misure fatte.

Maestro - *io vorrei sentire da uno di voi se secondo lui i perimetri dovevano venire uguali o no e che dica: questi numeri più o meno sono uguali perchè dovevano venire uguali, oppure: questi numeri sono diversi perchè dovevano venire diversi*
14 - *per me devono venire uguali, le aree e i perimetri, perché la lunghezza dei lati dei rettangoli devono essere uguali tutti quanti* (Donata intende "uguali" per tutti i bambini che fanno la misura)
Maria - *Donata, guarda quello che hai davanti agli occhi*
14 - *voglio dire: a ognuno gli sono capitati questi tre rettangoli, perciò ognuno dovrebbe avere la stessa misura, per i lati, a meno che non abbia misurato male, la riga gli si è mossa, cosi. Oppure gli sono venuti i lati uguali, e la somma la hanno magari sbagliata, hanno aggiunto un numero, o hanno tolto un numero, o non hanno contato bene!*
Maria - *ma come si fa a sapere chi ha fatto proprio bene, e ha fatto la misura giustissima*
14 - *uno dovrebbe misurare proprio perfettamente*
16 - *misurando perfettamente viene*
17 - *non possono venire uguali, i perimetri*
1 - *a meno che la figura non sia uguale*
Pablito - *chi vuole sostenere l'opinione contraria, che invece i perimetri dovrebbero venire diversi?*

Enriques: Parallelogrammi aventi uguali la base e l'altezza sono equivalenti

Andrea, ragionando sui perimetri, ribadisce le modalità di costruzione del rettangolo e spiega che, facendo combaciare i due triangoli, due lati si "annullano". Quindi, a seconda di quali lati vengono "annullati" la misura del perimetro cambia e se si annullano due lati corti o due lati lunghi il perimetro deve necessariamente essere diverso. Queste argomentazioni riescono a convincere Donata che finalmente riconosce il fatto che figure diverse fatte con gli stessi triangoli possano avere perimetri diversi. Ma forse anche la sua precedente osservazione sull'uguaglianza dei risultati ottenuti si riferiva ad un pensiero corretto. Infatti ribadisce che se tutti i ragazzi misurano il perimetro della stessa figura, facendo la misura giustissima, il valore del perimetro deve essere uguale per tutti. Ancora una volta, quando si vanno a cercare le motivazioni che portano un ragazzo a sostenere delle idee che a prima vista sembrano scorrette o sbagliate, si scopre che quello che lui sta guardando è diverso da quello che sta guardando l'adulto. Basterebbe precisare meglio il punto di vista, direbbe saggiamente Max. Ed anche in questo caso, Donata si riferisce alla necessaria uguaglianza del risultato della misura del perimetro fatta da tante persone su una stessa figura, mentre dalla discussione sembrava di capire che lei si riferisse al risultato della misura realizzato (da una sola persona) su figure diverse .
Se sui perimetri si è quasi tutti d'accordo, bisogna ribadire ancora, pensando di verificarlo poi con i calcoli, la logica delle costruzioni.

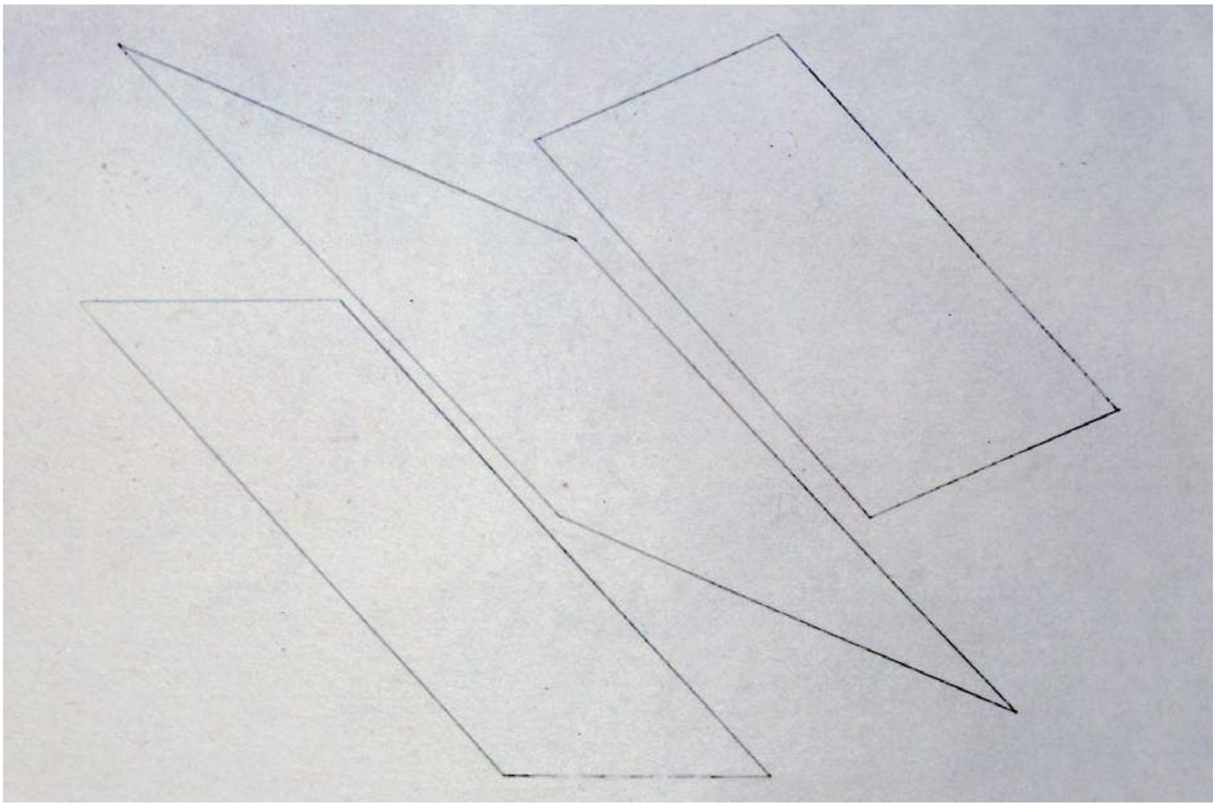


Fig. 128 - Parallelogrammi equivalenti composti dalla stessa coppia di triangoli

36. Altezze

Dopo aver (quasi) chiarito il problema dei perimetri , ricordiamo ancora una volta come le modalità di costruzione delle figure garantiscano l'uguaglianza delle superfici tra la coppia di triangoli, il quadrilatero ed il rettangolo corrispondenti. Infatti, l'area di un triangolo è la metà di quella dei "suoi" parallelogrammi (tre fatti col plip e tre senza plip); l'area del parallelogrammo è uguale a quella del rettangolo ottenuto tagliando e ricomponendo il parallelogrammo. Per avviare le procedure di calcolo ed eventualmente trovare "le formule", invitiamo i ragazzi a trovare un'altra proprietà comune tra figure scelte appropriatamente. Appoggiate per la base su stecche di legno, in modo da garantire un allineamento perfetto, sono disposte tre serie di figure: ciascuna serie è composta da un triangolo scaleno, due parallelogrammi e il rettangolo costruito con gli appositi tagli su quel triangolo. Le altezze delle figure, relative alla base appoggiata sulla stecca sono tutte uguali.
I ragazzi hanno a disposizione, oltre ai triangoli e ai parallelogrammi su cui hanno già lavorato, stecche e stecchini che serviranno loro per indicare le altezze delle figure.

Pablito - *adesso guardate queste tre stecche: su ognuna di queste tre stecche c'è un triangolo, due parallelogrammi e un rettangolo* (e lo chiamo rettangolo per distinguerlo dai parallelogrammi che non sono rettangoli). *Ora vorrei fare un giro di opinioni per decidere che cosa hanno di uguale le figure che stanno sulla stessa stecca. Guardiamo qui, davanti a Sara, queste figure bianche che cosa hanno di uguale*
3 - *hanno tutte quante degli angoli*

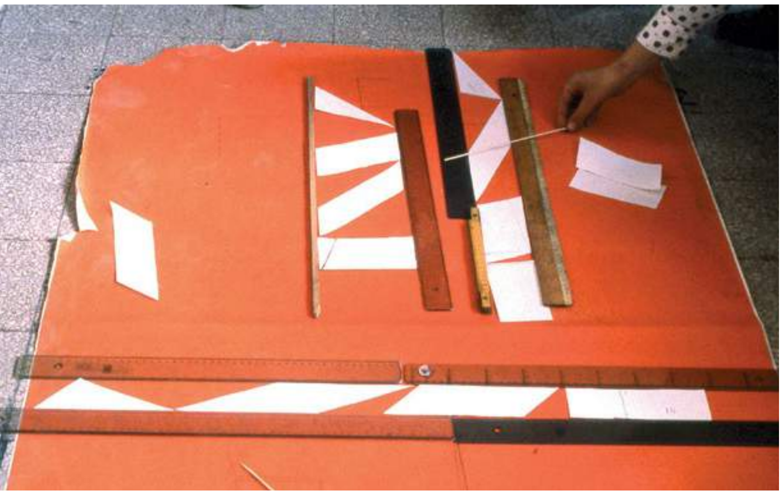


Fig. 129 - Altezza delle figure o distanza tra le stecche?

Fig. 130 - Diverse le posizioni delle figure, diverse le altezze

17 - *hanno dei lati paralleli*
1 - *non tutti però hanno dei lati paralleli... Ma no, il triangolo no*
11 - *hanno i lati paralleli ma non tutti*
Maria - *tutti devono avare una stessa cosa in comune*
16 - *no no, tutti lunghi... larghi...*
1 - *hanno dei lati normali, senza dire che sono tre o quattro. Potrebbe essere una cosa come questa; si possono attaccare tutti da una parte e arrivano tutti alla stessa parte; se si mette un'altra linea, è parallela a questa. Hanno la stessa lunghezza*
Maria - *chi è che pensava la stessa cosa di Marco, e adesso ha il dispiacere di non poterla dire?*
1 - *Max lo ha già detto*
18 - *anche io*
13 - *io volevo dire l'altezza*
Maestro - *prendi un pennarello, e vediamo cosa intendi con altezza. Secondo te, tutti hanno le altezze uguali?*

1 - *le altezze, le lunghezze e le bassezze*
17 - *sono tutte figure che si possono formare da dei triangoli!*
13 - (mette vari stecchini - altezze sulle figure)
Maria - *Marco aveva detto che la distanza tra la stecca di base e la stecca in alto è uguale. La possiamo chiamare in qualche modo, questa distanza?*
1 - *parallela*
Maria - *possiamo misurare questa distanza dentro le figure che abbiamo qui davanti?*
5 - *basta che misuri la distanza tra una stecca e l'altra e trovi l'altezza di tutte le figure.*

Mentre è consuetudine tracciare le altezze all'interno dei triangoli rettangoli o degli equilateri, le altezze dei triangoli scaleni lasciano sempre qualche perplessità.
Questo argomento rappresenta l'oggetto della lunga discussione che riportiamo, sia per far comprendere la difficoltà dei ragazzi ad uscire dagli "stereotipi visivi" a cui i libri di testo li hanno comunque abituati, sia per apprezzare la varietà degli esempi e l'acutezza delle argomentazioni che i ragazzi presentano nella discussione.
È anche interessante notare come i ragazzi sappiano onestamente riconoscere di essersi sbagliati, di non essere più "d'accordo con se stessi" mano a mano che osservano, discutono e si confrontano su un argomento in cui la percezione, le conoscenze e le parole per esprimersi vanno facilmente in conflitto.
Marco, che ha immediatamente notato come le due stecche siano alla stessa distanza, è molto perplesso, e non sa dare il nome "giusto" alla proprietà comune che vede nelle differenti figure disposte sulla stessa stecca.
La "distanza" tra le stecche e l'"altezza" delle figure sembrano appartenere a due ordini di ragionamento che è difficile conciliare. I differenti esempi, come la differenza nella misura dell'altezza di Marco dalla testa al pavimento, sia quando sta dritto sia quando mette il suo corpo per obliquo, la misura dell'altezza del maestro in varie posizioni, o i modi per misurare l'altezza della Torre di Pisa non riescono ad essere convincenti per tutti.
Le altezze di oggetti tridimensionali evocano idee completamente diverse rispetto quelle evocate da una figura bidimensionale; soprattutto se l'oggetto tridimensionale è un bambino la cui altezza è stata misurata moltissime volte fin dalla nascita.

Fig. 131 - Misurare le altezze

Carlo e alcuni altri insistono sulla necessità "dell'angolo retto" cioè sulla necessità che l'altezza sia perpendicolare alla base: le argomentazioni sono corrette ma spesso il passaggio da esempi bidimensionali (la perpendicolare ad una retta) a esempi tridimensionali (la perpendicolare ad un piano, come cerca di spiegare Raffaella), porta tutte le difficoltà connesse al cambio di rappresentazione spaziale. Alcuni sono ben sicuri delle loro argomentazioni, altri si convincono a fatica, mano a mano che il discorso prosegue.
Ancora una volta, la effettiva difficoltà di comprensione fa capire quanto sia superficiale costringere i ragazzi ad imparare formule che parlano di basi e di altezze senza avere approfondito i concetti geometrici a cui queste due semplici parole fanno riferimento.

Qui l'attenzione di Marco è rivolta al triangolo scaleno.

1 - *c'è una cosa, in questo triangolo, che per me è strana, l'altezza, che qui potrebbe essere tracciata dritta...*
16 - *però in alcuni triangoli non si possono tracciare linee dritte dentro*
1 - *è questo che volevo dire, in effetti, che non si possono...*
13 - *credo che l'altezza sia questa, credo*
1 - *vedi, arriva qui. Lo devo mettere qui lo stecchino, perché altrimenti non posso formare bene un angolo retto. Vedi, qui non può essere*
Pablito - *perché non può essere? Perchè esce di fuori?*
Maestro - *se esce fuori, non può essere l'altezza?*
1 - (che ancora non riesce a separare concettualmente l'altezza perpendicolare alla base e il lato, ovviamente più lungo dell'altezza stessa) *non credo che importa, ma l'altezza, è quello che mi sembra strano, perché... bisognerebbe mettere... perchè se una volta la misuri così, una volta ti può venire venti, e qui ti può venire quindici...*
Maria - *Sara, che te ne pare di questo problema di Marco? Cosa c'è di uguale nelle figure, che mantiene alla stessa distanza le due stecche?*
4 - *per me non hanno niente di uguale*
18 - *io non ho capito quello che ha detto Marco*
5 - *lo spiego io, ma forse ho capito male pure io. Io posso dire una cosa, che per tutti si può misurare l'altezza, così, in dritto*
16 - *uno può misurare così: inizia da qui e finisce qui, infatti questa qui è l'altezza*
1 - *Massimiliano, ma in questo caso hai la distanza*
17 - *no, io invece avrei anche l'altezza*
16 - *e l'altezza secondo te cosa è?*
Pablito - *è così, mica è tanto sbagliato, anche sul triangolo equilatero, o sul rettangolo, si vede bene. Qualcuno è contrario a dire che questo lato qui è più lungo dell'altezza?*
1 - *scusa, e poi aspetta, ho una cosa contro di me pure, perché basta avere un angolo retto*
- *ma non può essere contro se stesso!*
10 - *come l'altra volta che non eri d'accordo con te stesso*
1 - *ma ho detto male: quando hanno angoli retti si può fare, quando non hanno angoli retti... non so*
Pablito - *Marco sta cercando, tra queste quattro figure, qualcosa che gli dica che la distanza è sempre la stessa, ma non la trova. Perché lui vede che la distanza tra due stecche è uguale, vede dove può fare gli angoli retti ma dice: Io voglio trovare nelle figure una cosa che sia uguale, e il lato non mi va bene perché nelle figure sono diversi*
11 - *facile, si misura l'altezza*
Pablito - *tracciala allora, falla vedere a Marco*
11 - *questa qui va dritta..ma questa va fuori!*
1 - (versaccio) *troppo semplice, se no c'ero già arrivato!*
Maria - *se questa distanza la guardiamo fuori delle figure, che male c'è?*
Pablito - *secondo voi l'altezza può andare fuori dalla figura? Quello stecchino che ho messo lì, facendolo andare a squadra tra le due stecche, può essere l'altezza del parallelogrammo? oppure deve andarci per forza dentro?*

37. Altezze, lunghezze, distanze

Le osservazioni si intrecciano insieme ai commenti: alcuni guardano i triangoli, altri i parallelogrammi, e ciascuno è attirato in modo diverso da quello che vede e che fa venire in mente nuovi interrogativi e nuove risposte. É difficile concentrarsi tutti sullo stesso problema ma, per adesso, si cerca di focalizzare l'attenzione sulla distanza tra le stecche che, secondo i nostri obiettivi, poteva essere interpretata come altezza comune a tutte le figure disposte tra le stecche.
Per chiarire il suo pensiero (e confondere le idee) Marco propone come esempio la misura della sua altezza, che assume valori diversi quando sta ben dritto o quando si mette "per sbieco". L'esempio è suggestivo, ma Marco chiama "altezza" la distanza della sua testa dal pavimento, che è ovviamente diversa quando sta dritto e quando sta "obliquo". Questo ragionamento non funziona con i triangoli che, come fa notare Andrea, non hanno una altezza da dritti e una da abbassati ma... sono sempre come sono.

1 - *come sarebbe a dire, allora, se io mi devo misurare e rimango dritto così, la persona che mi deve misurare, misura dalla testa ai piedi... se mi metto obliquo invece... non può essere, perché se io mi metto per sbieco, tu mi misuri un'altra altezza*
Pablito - *infatti, se ti metti per sbieco, potresti dire che la tua altezza cambia*
17 - *tu ti metti cosi, poi metti una stecca sulla tua testa, poi metti il metro così* (perpendicolare alla stecca)*; ed è la tua altezza*
1 - *ma se sto sbieco, e misuro dalla testa a terra, come fa ad essere la mia altezza? tu misuri il fatto che mi abbassavo*
5 - *non sono d'accordo con l'esempio di Marco, perché un conto è misurare una cosa che si può mettere sia dritta che sbieca, un conto è misurare l'altezza di una cosa che è sempre così.*
1 - *ma se sto sempre sbieco, quale misuri?*
Pablito - *questo è il vero problema*
5 - *misuro da qui a qui, la tua altezza da sbieco*
17 - *ma vedi che se tu trovi un gobbo, e quello cammina così, che fai?*
16 - (portando nuovamente l'attenzione sulle figure geometriche) *a te non ti serve sapere quanto è lungo quel lato, ma quanto è alto il triangolo, cioè la distanza tra le due righe*
18 - *ma sono 13, tutte le altezze sono 13*

Raccogliendo il commento di Max, i ragazzi guardano nuovamente triangoli, parallelogrammi e rettangoli: il disegno convenzionale riportato sui sussidiari, dell'altezza che "esce dal pizzo" del parallelogramma ma sta dentro il parallelogramma stesso è ben presente nelle osservazioni di Leo. Non solo per i triangoli scaleni ma anche per i parallelogrammi lo stereotipo visivo impedisce di vedere correttamente l'altezza come la minima distanza tra le due basi opposte.
D'altra parte, il fatto evidente che il lato obliquo del parallelogramma sia necessariamente più lungo della sua altezza lascia perplessi i ragazzi, che non hanno difficoltà a pensare che il lato del rettangolo (perpendicolare alla base) che tocca le due stecche corrisponda alla sua altezza.

15 - *ma se io nel parallelogramma traccio una riga da qui a qui, da questo pizzo a terra, e va a finire qui, e dopo la misuro...*
Pablito - *certo, può essere questa una altezza del parallelogramma. Leo dice così, ma non ho capito gli altri cosa pensano*
18, 17, 14 - *non sono d'accordo con Leo*
10 - *non so*
13, 12 - *per me sì*
Pablito - *a Diego non importa se l'altezza esce fuori dalla figura: la misura e basta*
12 - *tanto se esco fuori, la linea è sempre la stessa*
11 - *è lo stesso pure per me, la linea, dentro o fuori, è lunga uguale*
16 - *anche se va di fuori, che fa di male?*
3 - *ma come si fa, il lato obliquo non si può mettere per dritto. Per questo non si può misurare!*

15 - *ma questa distanza è più corta del lato*
3 - *ma guarda! è diverso! si vede anche ad occhio*
Pablito - *allora ripeto la domanda di Marco: vedo che queste figure hanno qualcosa in comune perché tutte mantengono tra le due stecche una distanza fissa. Soltanto, se vado a misurare il lato del parallelogramma, lo trovo più lungo di quello del rettangolo e non so che cosa misurare per trovare la cosa in comune*
2 - *perché se queste sono due linee parallele e ci metti dentro il triangolo, vedi che il suo lato è molto più inclinato di questo del rettangolo*
Maestro - *il problema di Marco resta. Io vorrei che qualcuno, Mayer per esempio, mi tracciasse quelle che, secondo lui, sono le altezze di queste figure*
1 - *se misuri la distanza tra le stecche, o l'altezza del rettangolo, lì è esatto*
Pablito - *l'altezza delle figure, appoggiate su questo lato, quale può essere?*
1 - *con l'angolo retto: per definirlo dritto ci vuole l'angolo retto*
Maria - *quindi altezza, secondo te, è la linea più corta che si può mettere...*
1 - *tra due linee. La distanza che si può mettere tra questo lato e quest'altro*
15 -*secondo me l'altezza è quella dritta. Per me sarebbe questa* (la perpendicolare alla base che "esce dal pizzo").

Si mette uno stecchino tra le due stecche e lo si fa scorrere sopra le figure cercando di far vedere che "la lunghezza di questa altezza" non cambia sia se esce sia se non esce dal pizzo. Ma questo non è ancora convincente: lo stereotipo visivo è fortissimo e ci vorranno altri ragionamenti per convincere tutti.

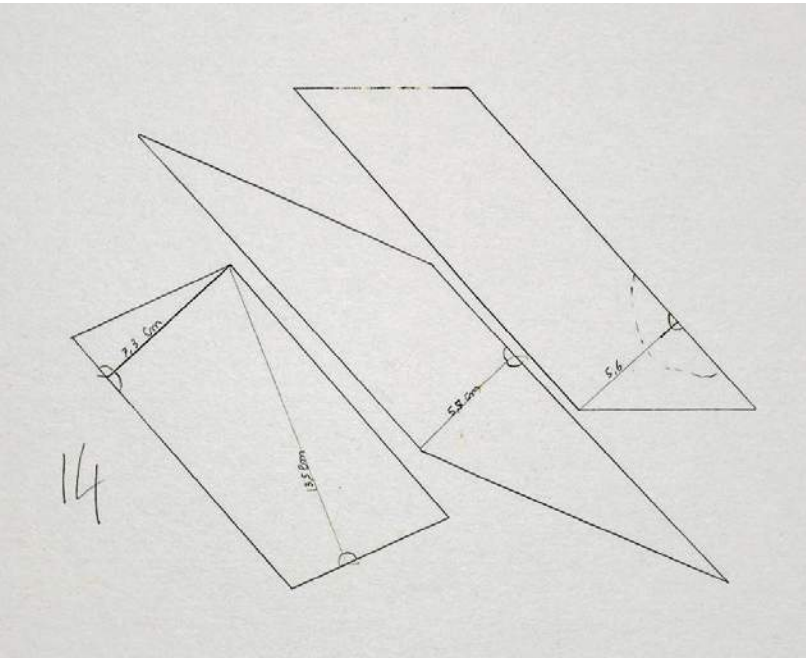
Marco - *ma questa è dritta mica è storta, chè, è piegata! È dritta come la squadra*
15 - *sì, è dritta, ma quella non misura l'altezza, secondo me l'altezza è all'angolo*
Pablito - *allora aspetta che metto lo stecchino*
16 - *ma è la stessa cosa*
15 -*sarà la stessa cosa, ma l'altezza è all'angolo*
Maria - *è come quando bisognava capire dove tagliare per fare il rettangolo*
Pablito - *dunque, se sono lunghe uguali, dal pizzo o dal lato, potrebbero essere tutte e due altezze!*
Maria - *sui fogli che abbiamo portato, potreste disegnare a casa l'altezza o le altezze delle figure che ci sono disegnate.*

Fig. 132 - Si misura l'altezza del triangolo

38. Altezze diverse, basi diverse

Ora i ragazzi muovono le figure e le dispongono tra le stecche su un'altra base. Ci si accorge subito che le altezze dei triangoli cambiano, perchè le altezze relative alla nuova base sono diverse da quelle su cui si era lavorato in precedenza. Quante altezze, allora in un triangolo? E in un rettangolo? E in un parallelogramma? Paolo cerca di spiegare cosa si intende per altezza portando diversi esempi, cercando di trasferire ad un contesto geometrico il significato di parole di uso comune.

Facendo ruotare rettangolo e parallelogramma in modo da appoggiarli prima sui lati lunghi e poi sui lati corti cambiano le basi e di conseguenza cambiano le altezze che i ragazzi indicano mettendo gli stecchini perpendicolari alle nuove basi: "ci vuole l'angolo retto" dicono in molti. Ci si accorge quindi che ogni figura può avere diverse altezze, ma si pone un nuovo problema: quante altezze uguali si potrebbero tracciare per ogni figura? E dove andarle a tracciare?



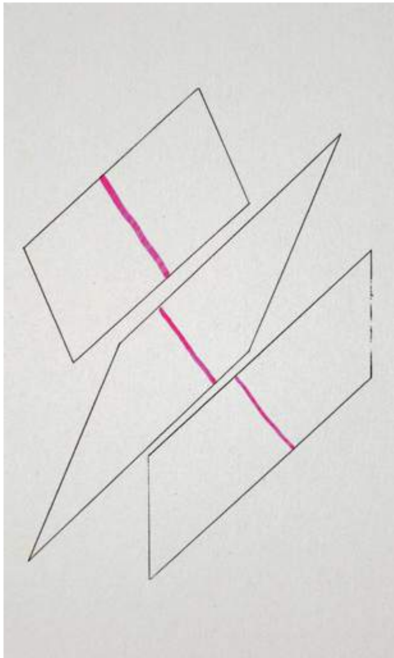


Fig. 133 - L'importante è l'angolo retto
Fig. 134 - Altezze perpendicolari a un lato del parallelogramma

5 - *stavamo discutendo delle altezze, ed era nato un problema, che se noi questo parallelogrammo lo mettiamo così, l'altezza uno dice che è questa; per me, almeno è questa, e credo che molti altri l'hanno detto. Però poi Marco si chiedeva: "e allora questo lato qui che è?" Per me l'altezza è una riga dritta così; facciamo finta che questa è dritta, misuri così, ed è l'altezza, quella, pure per me*
16 - *ma poi dipende pure da come lo metti. É logico, se metti il parallelogramma in un altro modo cambia l'altezza. E ci sono pure un mucchio di problemi su che cosa si intende per base, perché per questi qui la base è questa linea qui, e appoggia su questa qua, e l'altezza è da qui a qui. Se io lo metto su questa linea qui, cambia la base e l'altezza è da qui a qui* (usa lo stecchino)
1 - *Max, ma non c'è solo quella di altezza*
Maestro - *quante ce ne sono di altezze diverse, lì?*
16 - *di altezze diverse, due*
Maestro - *ma scusa, Max, quante basi ha quella figura?*
16 - *quattro: però uguali due. Dipende però che cosa si intende per base; io metterei la base questa o questa*
1 - *per forza se ci sono tante basi ci sono tante altezze...*
Maria - *siete d'accordo con quello che dice Max, che quel rettangolo lì può avere quattro basi*
- *sì*

Alla ricerca delle varie altezze, ecco qualcuno con una proposta, probabilmente ancora mediata dal ricordo delle figure da sussidiario: un "pizzo" può almeno funzionare come base? La figura ci si potrebbe appoggiare sopra e allora, perchè no? Andrea e altri non sono del tutto contrari e cercano mediazioni, forse perchè - chi può saperlo - sembrano possibili cose a cui non avevano mai pensato prima.

11 - *però ce ne è pure un'altra* (lo mette in piedi sull'angolo)
- *così tocca con la punta*
3 - *due altezze, questa e questa, perché queste due sono la stessa cosa*
11 - *ma io non intendo questa, la base; ma questa la base!*
Maria - *quale intendi per base? Il pizzo?*
12 - *ah, il pizzo è la base?!*
Maria - *Raffaella, secondo te ha ragione Mayer a considerare quella una base?*
5 - *ma forse dipende da uno come lo guarda!*
8 - *guarda, la base la devi mettere dritta, se è storta non è più base, ossia è sempre base ma.. non la posso misurare ... perché è storta...*
5 - *secondo me potrebbe pure essere, e può essere che viene pure la stessa misura, in certi casi*
17 - *per me si, la base può essere un pizzo*
3 - *per me si*
6 - *si*
- *no, ci ho ripensato, non potrebbe essere un pizzo*
Paolo - *quando diciamo: l'altezza di un pacco, la gente suppone che ci sia un piano e che il pacco ci sia appoggiato sopra, su una faccia che fa da base. Dopo fa una linea verticale, che è sempre lunga uguale in qualunque punto del pacco, e quella è la sua altezza. Se invece uno mette il parallelogrammo su un pizzo, succede che non si può dire precisamente come lo mette perché, sempre sul pizzo, può metterlo in tanti modi* (fa ruotare il parallelogramma sul vertice).
In questa figura, di distanze dal pizzo alla cima ce ne sono tante, e non si può capire a quale posizione ci si riferisce.
Per questo non si chiama altezza qualche cosa che si riferisce alla figura quando è poggiata su un pizzo, proprio perché non si sa bene come è messa. La gente misura una lunghezza chiamata ***altezza*** *solo quando le figure sono appoggiate sopra una base che è stabile e l'altezza rimane uguale anche se sposti la figura.*
Mettiamo questo parallelogramma sul mio pavimento di base. Si può dire quale è l'altezza o no? Ditelo tutti, a giro, se c'è l'altezza, e quale è, indicatela con uno stecchino; se ce ne ha una sola, o tante
2 - *io credo di si, secondo me è questa qui*
17 - *ce ne stanno due*
Paolo - *appoggiata così come è, stiamo dicendo*
1 - *le posso misurare in tanti posti ma ha sempre lo stesso numero*

39. Altezze nello spazio

Il parallelogramma, appoggiato tra le due stecche sulla base minore, richiama l'immagine della Torre di Pisa: l'esempio è convincente e l'altezza geometrica del parallelogramma diventa la lunghezza della torre, creando a livello linguistico difficoltà analoghe a quelle trovate per altezza delle figure e distanza tra le stecche o, come nell'esempio di Marco, tra l'altezza in piedi e l'altezza di sbieco.
Dunque, come si potrebbe misurare l'altezza della Torre di Pisa? Il "concreto fisico" prevale sull'"astratto geometrico" e i ragazzi trovano sistemi plausibili per misurare la lunghezza - altezza della Torre, usando corde o stecche che partano dalla parte più alta e arrivino fino a terra. Le misure prese in diversi modi, e da diversi punti dell'ultimo terrazzo (parallelo al suolo) devono essere uguali e dunque, come dice Carlo, le diverse altezze devono avere "lo stesso numero". Anche l'altezza

della torre, però, dovrebbe secondo alcuni essere presa da un punto estremo (analogo al pizzo del parallelogramma) . E l'esempio della torre si complica: un elicottero che non sta sulla cima della torre, ma è fermo alla stessa altezza del terrazzo superiore, è alto come la torre? La sua distanza da terra può servire a misurare l'altezza della torre? É possibile misurare un'altezza geometrica "lontana" dalla figura a cui si riferisce?

Paolo - (guardando il parallelogramma sul pavimento) *se questa fosse la torre di Pisa, immagina di misurarla dal terrazzo in cima al pavimento sotto, e dicci qual è l'altezza.. Se la misurassi qui, sarebbe la stessa cosa?*
15 - *per me si, è la stessa cosa, e la misuro così*
Paolo - *ci metti una riga sopra, a pari, e poi misuri l'altezza.*
Quello che ci stiamo domandando è proprio se di altezze ce ne deve essere una sola, o possono essere tante
6 - *si, ce ne stanno tante*
Maestro - *tante uguali o tante diverse?*
3 - *le altezze, basta che sia una linea che faccia un angolo retto con questa di base, dovunque lo metti, da questo punto qua a questo punto qua, basta che faccia l'angolo retto*
Paolo - *e viene fuori sempre la stessa altezza. Ma allora ce n'è una, o ce ne sono tante?*
3 - *ma come intendi, altezze diverse, o altezze diverse di diversi numeri, o di diverse posizioni*
Paolo - *ora ci siamo: intendiamo diversi numeri o diverse posizioni, quando diciamo altezze diverse?*
3 - *è quello che ti chiedo io a te*
Paolo - *anche io a te. Secondo te, quando uno dice: l'altezza della torre di Pisa, deve considerare il fatto che si possono tracciare tante linee fino a terra, come questa o questa, o questa, o il fatto che quelle linee hanno tutte lo stesso numero?*
3 - *per me, hanno tutte lo stesso numero, ma devono fare l'angolo retto, perché se tu la metti così, è diversa l'altezza*
Maestro - *che vuol dire una linea retta?*
1 - *che è dritta... qui fa un angolo retto, capisci, che non si allarghi e che non si stringa*
Maestro - *allora è diverso dire un angolo retto o una linea retta, anche se sono retti tutti e due*
1 - *comunque si potrebbe definire anche la linea più corta, questo non è sbagliato, perché più corta di questa... non c'è. Perciò, se fai senza angolo retto, così, prima di tutto è più lunga... É come se lanci un pezzo di piombo dalla cima della torre, che fa così, che va dritto*
Maestro - *ma cosa fa un angolo retto, il piombo o cosa?*
1 - *viene fuori un angolo retto. Però aspetta, tanto retto non dovrebbe essere, perché la terra è sferica, e allora qui sarebbe un pò curvo*
- *che palla che sei, Marco, è retto lo stesso*
Paolo - *tu credi che un sasso lasciato cadere con una corda giù da un trampolino che sporge dalla torre di Pisa, la misurerebbe?*
Maestro - *e le altezze vengono uguali anche dal trampolino così lontano?*
12 - *si, perché l'altezza da qui a qui, si deve calcolare*
18 - *è questa; ed è soltanto questa, perché se tu la metti in varie parti, è sempre la stessa, e per me l'altezza deve formare un angolo retto*
Maria - *senti, fa un angolo retto... solo?*
18 - *no, due, tre, quattro... per me sono quattro*

Per cercare di convincere chi ancora non vuole vedere l'altezza come distanza da un piano di riferimento, il maestro si mette in gioco con un altro esempio, e chiede di misurare la sua altezza in diverse posizioni.
Vuol far capire che la sua altezza in piedi è diversa dalla sua altezza da sdraiato ma nemmeno questo esempio porta al risultato desiderato. L'esperienza che tutti i bambini hanno sulla misura della propria altezza rende anche questo esempio poco convincente. L'altezza, nel corpo, è irrimediabilmente una e le altre dimensioni si chiamano al massimo larghezza, spessore... Ancora una volta il cambio di contesto che avrebbe potuto portare ad una maggiore generalizzazione e ad un

ampliamento di vedute non si è dimostrato positivo: i ragazzi danno significati univoci alle parole e non vedono le relazioni spaziali che le parole stesse dovrebbero indicare.

Maestro - *se non ho capito male, mi sembra che tu dici che se un oggetto è messo in un certo modo, devi stabilire tu che altezza vuoi. Mi sembra questo il tuo discorso. Misuriamo l'altezza del Maestro, da dove parte?*
12 - *dalla testa*
Maestro - *sempre dalla testa? e giù fino ai piedi?*
12 - *si*
Maestro - *e adesso misuriamo l'altezza del maestro steso, da davanti a dietro. Devo partire sempre dalla testa?*
12 - *si*
Maestro - *dai piedi alla testa nuovamente? e questa sarebbe la mia altezza? Io invece avevo pensato che quando io sto sdraiato tu misuravi soltanto da qui a qui, perché quella è la mia altezza da sdraiato*
12 - *ma quella è la larghezza!*
Maestro - *ma quando sono sdraiato, quella non è più la larghezza*
8 - *io correggo quello che ha detto Diego*
17 - *l'altezza si misura sempre dalla testa in giù*
Maestro - *ma io mi sposto, cambio posizione*
8 - *Diego ha detto che quando il maestro è steso, quella è la larghezza, invece la larghezza è quella che prima era l'altezza, è questa dal pavimento*
Maestro - *se sto così, e se sto così?... e allora io credevo di aver capito questo, di Diego, che ogni posizione ha la sua altezza... e invece lui dice di no!*

40. Dalla Torre di Pisa ai quadrilateri

Si ritorna ai quadrilateri-torre e con gli stecchini si prova ancora a vedere se per tutti è possibile identificare l'altezza delle figure come distanza tra le due stecche. Ci sono irriducibili che non sono ancora convinti ed anche l'esempio della torre porta talvolta a divergere invece che a concentrare l'attenzione sul problema.

Paolo - *se mettessi la tua asta qui, misureresti l'altezza della torre o misureresti un'altra cosa?*
8 - *un'altra cosa, perché l'altezza deve iniziare o finire da un angolo*
5 - *ma scusa, se è da qui o da qui, che importa?*
8 - *deve essere per forza da un angolo*
12 - *le altezze non possono essere così come fanno molti, perché l'altezza da qui a qui, è soltanto l'altezza dell'aria, mentre l'altezza della torre di Pisa è questa, è un'altra*
16 - *facciamo che non è la torre di Pisa, è un parallelepipedo, un parallelogramma*
Maria - *allora l'altezza dell'aria non ci interessa?*
12 - *no, perché a me mi interessa l'altezza della torre*

Tornando dall'esempio della torre alle figure disposte sul pavimento, si passa anche concettualmente dalla tridimensionalità degli oggetti alla bidimensionalità delle figure piane. Dalle Torri immaginate e dagli "oggetti" ritagliati in cartoncino, bisogna arrivare all'idea astratta di figura geometrica piana, che ha perso ogni caratteristica fisica, per vederne solo le proprietà spaziali e le relazioni tra queste proprietà.

Maestro - *torniamo ai quadrilateri, dove misureresti l'altezza per quel quadrilatero?*
2 - *qui, che va a finire a un angolo*
14 - *l'altezza è la strada più breve tra un angolo e il lato opposto*
16 - *io lo so qual è , e se proprio vuoi saperlo, esce dal quadrilatero*

- *pure per me*
Pablito - *disegnalo alla lavagna così vediamo tutti*
16 - *pure quella è un'altezza?! ma in quella figura, non è retto*
14 - *se ci viene l'angolo retto, bene, se no va bene lo stesso, da un angolo al lato opposto*
Maria - *secondo te, se si vuole l'altezza di quel quadrilatero, si deve unire l'angolo con un punto qualsiasi del lato opposto, facendo la strada più breve possibile, anche senza angoli retti; è possibile così?*
5 - *ma la strada più breve è quella dell'angolo retto; e allora?*
Maria - *Donata ha detto che se l'angolo retto non c'è va bene lo stesso*
5 - *ma Donata ha detto una cosa erratissima, secondo me. Perché ha detto che vuole la strada più breve, e la strada più breve ha l'angolo retto. Ma lei ha detto che vuole la strada più breve senza angolo retto. Allora io non sono d'accordo*
14 - *io l'angolo retto non l'ho trovato*
Maria - *Carlo Antonio ha detto qualcosa su cui potremmo metterci d'accordo. Carlo, sei capace di ripeterlo?*
3 - *sì, naturalmente*
Maria - *e sei capace anche di convincere i tuoi compagni più restii?*
3 - *no davvero. Avevo detto che l'altezza è sempre la stessa, in certi casi, e la puoi misurare qua, qua e qua, in tanti punti. Ci deve essere l'angolo retto*
1 - *per me dovrebbe essere: linea dritta, con l'angolo retto sopra qui da dove parte, e angolo retto sotto.*
12 - *non avete precisato da quale punto fare la misura e a quale punto arrivare...*
Maria - *il punto lo devi scegliere te*
Paolo - *per concludere e trovarci tutti d'accordo, cerchiamo l'altezza di una di queste figure... ma di che figure stiamo parlando?*
1 - *triangoli, rettangoli e parallelogrammi*
Maestro - *allora prendiamo una figura, per esempio questa, appoggiamola su questo lato e, se è ben appoggiata sul lato, la lunghezza dell'altezza è solo una, come diceva Carlo, e si può prendere da dove si vuole. Se pigliamo un altro lato come base, si può avere una altra altezza. Questo rettangolo qui, per esempio, quante altezze ha?*
- *tutti dicono due*
17 - *ma due altezze diverse, dici*
Maestro - *quante altezze diverse ha questa figura -triangolo?*
12 - *una*
Maestro - *per vedere l'altezza, appoggio la base per bene, e poi faccio quello che diceva Carlo. Quante sono in questa figura?*
- *una* - *tre* - *due* - *tre* - *non sono sicuro* - *due e mezzo*
16 e altri - *tre*
17 - *l'ho messo su un lato, e poi ho visto gli altri. Ora pure io dico tre*
Maestro - *quante altezze ci sono in questo triangolo equilatero*
2 - *nessuna*
1 - *ma cosa intendi per nessuna: che non c'è nessuna altezza o che non ce ne è nessuna diversa da una?*
2 - *una*
15 - *nessuna altezza diversa*
Pablito - *brava, nessuna altezza diversa dalla prima, che è una*
8 - *che vuoi dire, ce ne stanno tre uguali, e vuoi dire una? allora una*
Pablito - *una tripla*
Maria - *mettiamo tre triangoli sulla riga, e vediamo le tre basi e le tre altezze*
8 - *facciamo dire a Sara quali sono le sue tre*
16 - *io pure ho detto tre: una, due e tre*
Maria - *falle vedere con tre triangoli uguali*
2 - *tanto sono uguali: piglia tre triangoli e mettili in modo che si vedano le altezze*
1 - *il triangolo ha tre lati tutti diversi, mentre nel rettangolo con le linee parallele i lati diversi sono due*
Maria - *su quel rettangolo li, disegna le altezze*
1 - *Questa volta le altezze sono due, perché ci sono due lati uguali: invece quando non ci sono i lati uguali, c'è un'altezza per ogni lato*

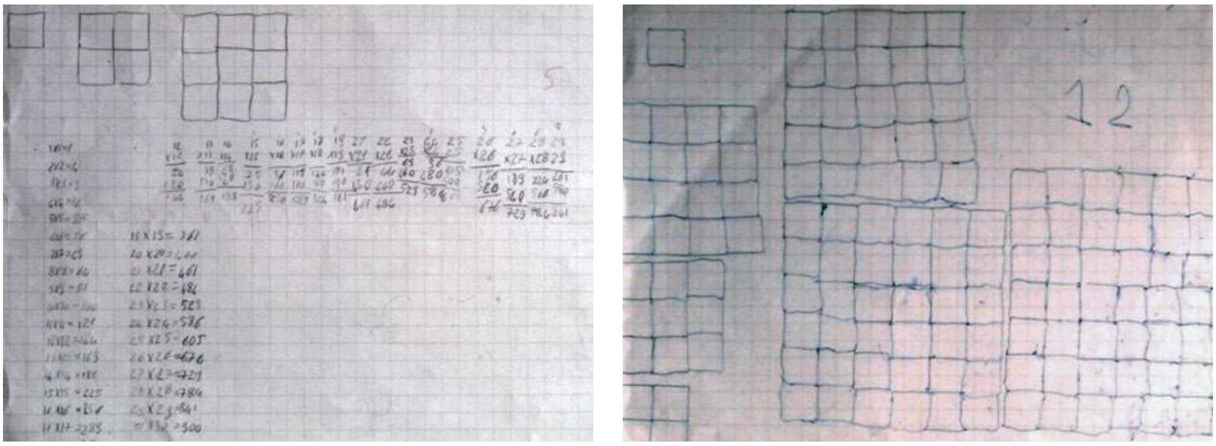


Fig. 136 - Conteggi di aree

41. Verso una parziale conclusione

Siamo ormai alla fine del percorso, ma dobbiamo ancora completarlo dal punto di vista matematico, facendo le misure che permettono di calcolare le superfici dei rettangoli e di conseguenza, ricordando i modi con cui sono stati ottenuti, conoscere quelle dei triangoli e dei parallelogrammi. Si propone ancora un lavoro di scomposizione: i rettangoli che abbiamo costruito dovranno essere riportati su carta quadrettata (con quadretti da 1 cm) per sapere esattamente quanti quadretti contengono.. . Il lavoro è un pò noioso ma, soprattutto, le figure costruite non si sovrappongono perfettamente alla quadrettatura sul foglio per cui bisognerà trovare un modo di contare anche i "mezzi quadretti". C'è chi li conta con cura ma c'è anche chi, forte della propria matematica, dopo aver correttamente quadrettato il proprio rettangolo, moltiplica il numero dei quadretti trovati nella base per il numero dei quadretti trovati per l'altezza, con tanto di numeri decimali per indicare le frazioni di quadretto. Il risultato delle due procedure, quella del conteggio e quella del calcolo... coincide.

Dai rettangoli riportati sul foglio quadrettato si passa allora a rettangoli riportati su fogli bianchi. Ora base ed altezza devono essere divise in parti usando il righello, e le parti saranno ovviamente di 1 cm. Nessuno si rimette a disegnare i quadretti da contare ed anche i meno matematici sanno che basta moltiplicare il numero di parti in cui è stata divisa la base per il numero di parti in cui è stata divisa l'altezza. Il calcolo diretto rappresenta, ovviamente, la strategia sbrigativa proposta in tutti i sussidiari come la nota formula "base per altezza". Il lavoro di quadrettatura e conteggio però ci sembrava un preliminare necessario a comprenderne meglio il significato, e mettere in evidenza che la moltiplicazione serve soltanto a conoscere rapidamente il numero dei quadratini unitari che ricoprono la superficie. In altre occasioni avevamo visto come i ragazzi sapevano cercarsi "campioni" prototipo delle proprietà che volevano analizzare (pag. 8): campioni di "drittezza" e di "liscezza", campioni di angolo retto..., così come i campioni di triangolo servivano per raggruppare quelli della stessa famiglia e campioni di quadrilatero servivano per dare un nome alle figure che venivano proiettate dalla lavagna luminosa. I quadratini da 1 cm di lato rappresentano adesso dei "campioni" unitari di superficie con cui ricoprire i rettangoli. Contando o calcolando il numero dei campioni unitari si può sapere quanti ne servono per ricoprire la superficie della figura su cui si sta lavorando e quindi conoscere il valore della superficie stessa. Le parole della formula per trovare l'area del rettangolo si riempiono così di significato e si stabilizza al tempo stesso il significato della unità di misura. Così il centimetro unitario rappresenta il campione che si deve ripetere fino a ricoprire la lunghezza di un segmento da misurare e il quadratino unitario rappresenta il campione che si deve ripetere fino a ricoprire la superficie da misurare.
La ricerca delle aree dei triangoli e dei parallelogrammi avvengono facilmente ricordando ancora una volta le procedure di costruzione con cui i rettangoli sono stati ottenuti: le superfici dei triangoli

saranno la metà di quelle dei rettangoli che hanno la stessa base e la stessa altezza, mentre quelle dei parallelogrammi avranno lo stesso valore di quelle dei rettangoli equivalenti.
La costruzioni dei vari rettangoli ha anche fatto capire che la misura della superficie è identica per qualunque coppia di valori (base per altezza corrispondente) venga scelta, e che sono identiche anche le aree dei triangoli quando si divide per due l'area ottenuta moltiplicando il valore di una qualsiasi delle sue tre "basi" (o lati) per l'altezza corrispondente. Così non sembrano più necessarie le posizioni rituali in cui vengono solitamente presentate le figure geometriche, perchè i ragazzi possono vederne le proprietà nello spazio, facendole ruotare mentalmente nel modo in cui riesca più comodo fare le misure necessarie. Ancora una volta quello che si vede con gli occhi, quello che si è capito lavorando e quello che la mente sa rappresentarsi in maniera astratta si intrecciano e si completano reciprocamente in una più complessa costruzione di pensiero.

Bibliografia e sitografia

Abbot, Edwin A., *Flatlandia*, Adelphi 1966

Al-Kalili, J., *Buchi neri, wormholes e macchine del tempo*. Dedalo 2003

Amaldi, U., http://online.scuola.zanichelli.it/amaldi-files/

Arzarello, F. et al., *Matematica: non è solo questione di testa*, Erickson, Trento 2010

BOERO P., *La matematica nella scuola di tutti*, Fabbri, Milano 1986.

Boero, P., http://www.dima.unige.it/

Castelnuovo, E., *Geometria intuitiva per le scuole medie inferiori*, Carabba, Roma 1949;

Enriques, F., Amaldi, U. (1875-1957), *Elementi di Geometria*, Zanichelli, Bologna 1946

Gallo, E., Cantoni, M., *Uso implicito delle trasformazioni: manipolare, congetturare, dimostrare*. In Podcast sul sito de 'La casa degli insegnanti', Torino, 2014

Manara, C. F., *La generalizzazione del concetto di geometria*. In: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, pp. 1197-1215, Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin, Paderno del Grappa, 1987

Manara, C. F., *L'eguaglianza in geometria*. In: *Nuova Secondaria* n.5 e n.6, 1988

Manara, C. F., *Trasformazioni geometriche*, Appunti per il Corso di perfezionamento in didattica della matematica, Brescia, 1994/95.

http://www.carlofelicemanara.it, sito di C. F. Manara (sono liberamente scaricabili tutti gli articoli)

Vergnaud, G., *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma 1994

Il **Centro Alberto Manzi** conserva tutti gli originali completi delle discussioni riportate in questo libro.

Centro
Alberto Manzi